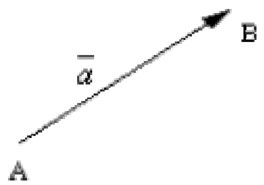
3. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

При вивченні різних розділів фізики зустрічаються величини, що цілком визначаються завданням їхніх чисельних значень, наприклад, довжина, площа, маса, температура і т.д. Такі величини називаються скалярними. Однак, крім них зустрічаються і величини, для визначення яких, крім чисельного значення, необхідно знати також їхній напрямок у просторі, наприклад, сила, що діє на тіло, швидкість і прискорення тіла при його русі у просторі, напруженість магнітного поля у даній крапці простору і т.д. Такі величини називаються векторними.

3.1. Поняття вектора

Уведемо строге визначення.

Спрямованим відрізком назвемо відрізок, щодо кінців якого відомо, який з них перший, а який другий.



Вектором називається спрямований відрізок, що має визначену довжину, тобто це відрізок визначеної довжини, у якого одна з обмежуючих його точок приймається за початок, а друга – за кінець. Якщо *A* – початок вектора, *B* – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$, крім того, вектор часто позначається одною буквою $\vec{a}$. На малюнку вектор позначається відрізком, а його напрямок стрілкою.

Модулем або *довжиною* вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину спрямованого відрізка. Позначається $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

До векторів будемо відносити і так називаний нульовий вектор, у якого початок і кінець збігаються. Він позначається $\vec{0}$. Нульовий вектор не має визначеного напрямку і модуль його дорівнює нулю $|\vec{0}| = 0$.

3.2. Колінеарні і компланарні вектора

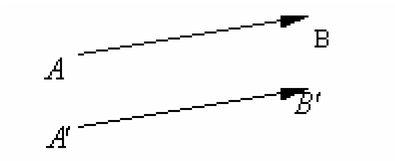
Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони розташовані на одній прямій або на паралельних прямих. При цьому якщо вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ однаково спрямовані, будемо писати $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, протилежно $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

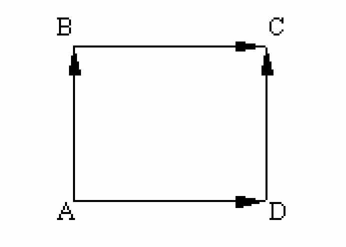
Вектори, розташовані на прямих, паралельних одній і тій же площині, називаються *компланарними*.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і рівні по довжині. У цьому випадку пишуть $\vec{a} = \vec{b}$.

З визначення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, поміщаючи його початок у будь–яку точку простору.

Якщо дано вектор $\overrightarrow{AB}$, то, вибравши будь–яку точку A', можемо побудувати тільки один вектор $\overrightarrow{A'B'}$, рівний даному, або, як говорять, перенести вектор $\overrightarrow{AB}$ у точку A'.





Якщо розглянути квадрат *ABCD*, то на підставі визначення рівності векторів, ми можемо написати $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, але $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DC}$, хоча усі вони мають однакову довжину.

3.3. Лінійні операції над векторами

Множення вектора на число

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається новий вектор $\vec{b}$ такий, що:

1. $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2. вектор $\vec{b}$ є колінеарним векторові $\vec{a}$;

3. вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ спрямовані однаково, якщо λ>0 і протилежно, якщо λ< 0. (Якщо λ=0, то з умови 1 випливає, що $\vec{b} = \vec{0}$).

Добуток вектора $\vec{a}$ на число λ позначається $\lambda \cdot \vec{a}$.

Наприклад, $\frac{1}{2}\vec{a}$ є вектор, спрямований у ту ж сторону, що і вектор $\vec{a}$, і має довжину, удвічі меншу, чим вектор $\vec{a}$.

Операція множення має наступні **властивості**:

1. Для будь–яких чисел *a* і *b* і вектора $\vec{a}$ виконується рівність $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

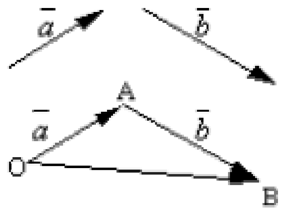
Дійсно, вектори, що знаходяться в обох частинах рівності, мають однакову довжину $|\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|$. Крім того, ясно, що вони однаково спрямовані, тому що їхній напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{a}$, якщо α і β одного знака, і протилежно напрямкові $\vec{a}$, якщо α і β різних знаків.

2. Нехай даний вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$. Для будь–якого колінеарного йому вектора $\vec{b}$ найдеться і притім тільки одне число λ, що задовольняє рівності $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

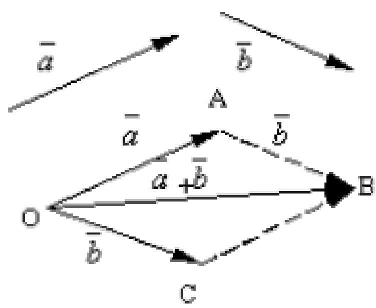
Одиничність числа λ випливає з того, що при множенні вектора $\vec{a}$ на два різних числа, одержуємо два різних вектори.

Додавання векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два довільних вектори. Візьмемо довільну точку *O* і побудуємо вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. Після цього з точки *A* відкладемо вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, що з'єднує початок першого вектора $\vec{a}$ с кінцем другого $\vec{b}$, називається *сумою* цих векторів і позначається $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.



Сформульоване визначення додавання векторів називають *правилом паралелограма*, тому що ту ж саму суму векторів можна одержати у такий спосіб. Відкладемо від точки *O* вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$. Побудуємо на цих векторах паралелограм *OABC*. Оскільки вектори $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$, то вектор $\overrightarrow{OB}$, що є діагоналлю паралелограма, проведеної з вершини *O*, буде очевидно сумою векторів $\vec{a}+\vec{b}$.



Легко перевірити наступні **властивості додавання векторів**.

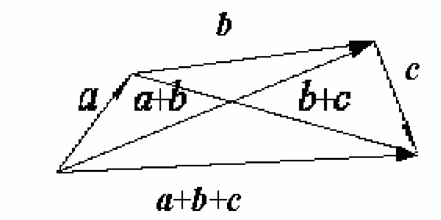
1. Ясно, що додаток нульового вектора до деякого вектора $\vec{a}$ не змінює вектора $\vec{a}$, тобто $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

2. Додавання векторів є комутативним, тобто $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

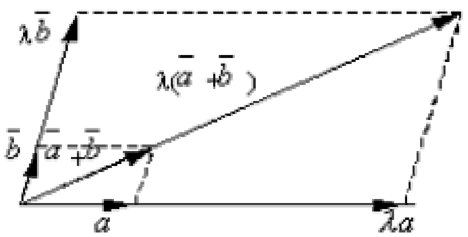
Це властивість відразу випливає з правила паралелограма.

3. Додавання векторів асоціативно, тобто для будь–яких трьох векторів $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$. Тому суму трьох векторів часто записують просто $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Суму трьох векторів можна одержати у такий спосіб. З довільної точки *O* відкладається вектор, дорівнює першому векторові. До його кінця приєднується початок другого, до кінця другого – початок третього. Вектор, що з'єднує початок першого вектора з кінцем останнього, буде сумою даних векторів. Аналогічно будується сума будь–якого кінцевого числа векторів.



4. Для будь–якого числа λ і будь–яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$.



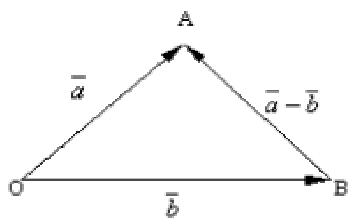
Помітимо, що при множенні векторів на число λ міняються тільки розміри векторів, тобто масштаб креслення, фігури залишаються подібними. Оскільки вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$ утворять сторони і діагональ паралелограма, то, помноживши всі члени на λ, тобто змінивши лише розміри векторів однаковим чином, ми одержимо знову паралелограм, а виходить, збережеться рівність $\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}=\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

5. Для будь–яких чисел a і b і будь–якого вектора $\vec{a}$ виконується рівність $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$.

Різниця векторів

Вектор, колінеарний даному векторові $\vec{a}$, рівний йому по довжині і протилежно спрямований, називається *протилежним* вектором для вектора $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$ або $\overleftarrow{a}$. Протилежний вектор $\overleftarrow{a}$ можна розглядати як результат множення вектора $\vec{a}$ на число $\lambda=-1$: $-\vec{a}=(-1)\cdot\vec{a}$.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, що дорівнює сумі векторів $\overleftarrow{a}$ і $-\vec{b}$, тобто $\vec{c}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

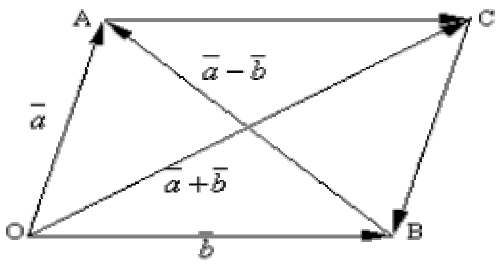


Очевидно, що $\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$ для будь–якого вектора $\vec{a}$.

Легко показати, що $\vec{b}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}$.

Таким чином, якщо $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, то $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

З визначення суми двох векторів випливає правило побудови вектора різниці. Відкладаємо вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ з загальної точки *O*.



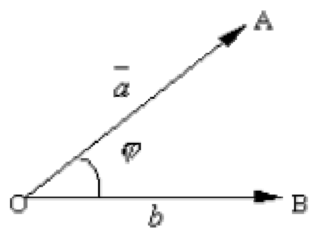
Щоб знайти вектор–різницю, потрібно до $\overrightarrow{OA}$ додати вектор $-\overrightarrow{OB}$ або $\overrightarrow{BO}$. Тоді $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$, що з'єднує кінці векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і спрямований від "віднімається" до "зменшуваного" (тобто від другого вектора до першого), і буде різницею $\vec{a}-\vec{b}$. Дійсно, за правилом додавання векторів $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$ або $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

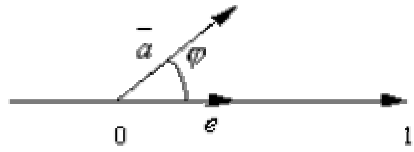
Таким чином, якщо на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відкладених із загальної точки *O*, побудувати паралелограм *OACB*, то вектор $\overrightarrow{OC}$, що збігається з одною діагоналлю паралелограма, дорівнює сумі $\vec{a}+\vec{b}$, а вектор $\overrightarrow{BA}$, що збігається з іншою діагоналлю, дорівнює різниці $\vec{a}-\vec{b}$.

3.4. Кут між векторами. Проекція вектора на вісь

Нехай у просторі дані два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Відкладемо від довільної точки *O* вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. *Кутом* між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший з кутів $\angle AOB$. Позначається $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.



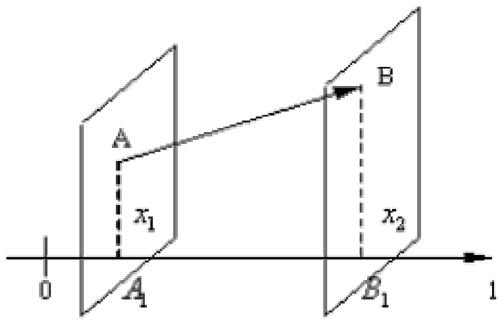
Розглянемо вісь *l* і відкладемо на ній одиничний вектор $\vec{e}$ (тобто вектор, довжина якого дорівнює одиниці).



Під кутом між вектором $\vec{a}$ і віссю l розуміють кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{e}$. Отже, нехай l – деяка вісь і $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ – вектор.

Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь l відповідно точок A і B. Припустимо, що A_1 має координату x_1, а B_1 – координату x_2 на осі l.

Тоді *проекцією* вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається різниця $x_2 - x_1$ між координатами проекцій кінця і початку вектора $\overrightarrow{AB}$ на цю вісь.



Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь l будемо позначати $пр_l \vec{a} = пр_l \overrightarrow{AB}$.

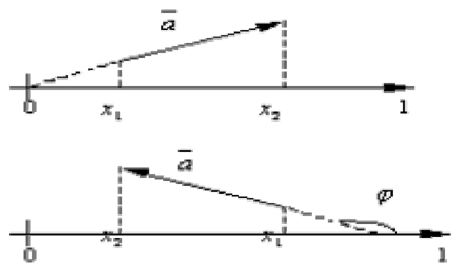
Ясно, що коли кут між вектором $\vec{a}$ і віссю l гострий, то $x_2 > x_1$, і проекція $x_2 - x_1 > 0$; якщо цей кут тупий, то $x_2 < x_1$ і проекція $x_2 - x_1 < 0$. Нарешті, якщо вектор $\vec{a}$ перпендикулярний осі l, то $x_2 = x_1$ і $x_2 - x_1 = 0$.

Таким чином, проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l – це довжина відрізка A_1B_1, узята з визначеним знаком. Отже, проекція вектора на вісь це число або скаляр.

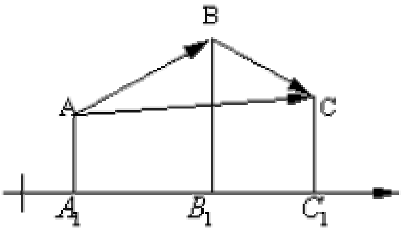
Аналогічно визначається проекція одного вектора на іншій. У цьому випадку знаходяться проекції кінців даного вектора на ту пряму, на якій лежить 2–ої вектор.

Розглянемо деякі основні **властивості проекцій**.

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добуткові модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута між вектором і віссю: $пр_l \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\left(\vec{a} \wedge l\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos(\varphi)$.



2. Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі проекцій векторів на ту ж вісь: $np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_l\vec{a}+np_l\vec{b}$.



Це властивість можна узагальнити на випадок будь–якого числа доданків.

3. Якщо вектор $\vec{a}$ збільшується на число λ, то його проекція на вісь також збільшується на це число: $np_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\cdot np_l\vec{a}$.

Наслідок. Проекція різниці двох векторів на вісь дорівнює різниці проекцій цих векторів на ту ж вісь.

3.5. Лінійна залежність і незалежність векторів. Векторні лінійні простори

Розглянемо кілька векторів $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$.

Лінійною комбінацією даних векторів називається будь–який вектор вигляду $\vec{a}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\lambda_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\ldots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{a_k}$, де $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ – деякі числа. Числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ називаються коефіцієнтами лінійної комбінації. Говорять також, що у цьому випадку $\vec{a}$ лінійно виражається через дані вектори $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$, тобто виходить з них за допомогою лінійних дій.

Наприклад, якщо дані три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то у якості їхньої лінійної комбінації можна розглядати вектори: $\vec{d}=3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{d}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\vec{d}=2\vec{a}$.

Якщо вектор представлений як лінійна комбінація якихось векторів, то говорять, що він *розкладений* по цих векторах.

Вектори $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, не всі рівні нулю, що $\lambda_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$. Ясно, що задані вектори будуть лінійно залежними, якщо який–небудь з цих векторів лінійно виражається через інші.

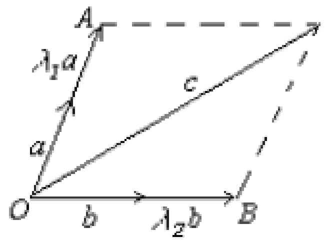
У противному випадку, тобто коли співвідношення $\lambda_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\lambda_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\ldots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$ виконується тільки при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$, ці вектори називаються *лінійно незалежними*.

Теорема 1. Будь–які два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

Таким чином, теорема затверджує, що лінійно незалежними на площині можуть бути тільки ті вектори, які не колінеарні.

Аналогічно можна довести наступну теорему.

Теорема 2. Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.



Таким чином, три не компланарних вектори завжди лінійно незалежні. Крім того, можна показати, що кожні чотири вектори лінійно залежні.

3.6. Базис, розкладання вектора по базису. Ортогональні системи векторів. Перехід від одного базису до іншого

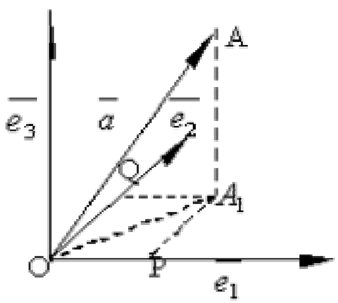
Базисом називається сукупність відмінних від нуля лінійно незалежних векторів. Елементи базису будемо позначати $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_k}$.

У попередньому пункті ми бачили, що два не колінеарних вектори на площині лінійно незалежні. Тому відповідно до теореми 1 (*будь–які два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні*) випливає, що базисом на площині є будь–які два не колінеарних вектори на цій площині.

Аналогічно у просторі лінійно незалежні будь–які три не компланарних вектори. Отже, базисом у просторі назвемо три не компланарних вектори.

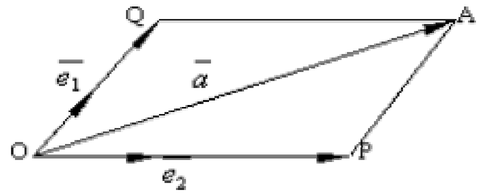
Справедливо наступне твердження.

Теорема. Нехай у просторі заданий базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Тоді будь–який вектор $\vec{a}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$, де x, y, z – деякі числа. Таке розкладання єдине.



Як частку випадку з цієї ж теореми можна сформувати наступне твердження:

Якщо задано базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ на площині, то будь–який вектор, компланарний з векторами $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ можна представити у вигляді $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, причому таке розкладання єдине.



Таким чином, базис дозволяє однозначно зіставити кожному векторові трійку чисел – коефіцієнти розкладання цього вектора по векторах базису: $\vec{a} \to (x, y, z)$. Вірно і зворотне, кожної трійці чисел *x, y, z* за допомогою базису можна зіставити вектор, якщо скласти лінійну комбінацію $x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = \vec{a}$.

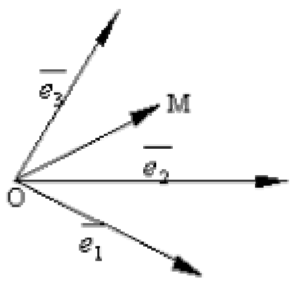
Якщо $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базис і $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$, то числа *x, y, z* називаються *координатами* вектора $\vec{a}$ у даному базисі. Координати вектора $\vec{a}$ позначають $\vec{a} = (x, y, z)$.

3.7. Декартова система координат

Нехай у просторі задана точка *O* і три не компланарних вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Декартовою системою координат у просторі (на площині) називається сукупність точки і базису, тобто сукупність точки і трьох не компланарних векторів (2–х не колінеарних векторів), що виходять з цієї точки.

Точка *O* називається початком координат; прямі, що проходять через початок координат у напрямку базисних векторів, називаються осями координат – віссю абсцис, ординат і аплікат. Площини, що проходять через осі координат, називають координатними площинами.



Розглянемо в обраній системі координат довільну точку *M*. Уведемо поняття координати точки *M*. Вектор $\overrightarrow{OM}$, що з'єднує початок координат із точкою *M* називається *радіусом–вектором* точки *M*.

Векторові $\overrightarrow{OM}$ в обраному базисі можна зіставити трійку чисел – його координати: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

Координати радіуса–вектора точки M називаються *координатами точки* M у розглянутій системі координат $M(x,y,z)$.

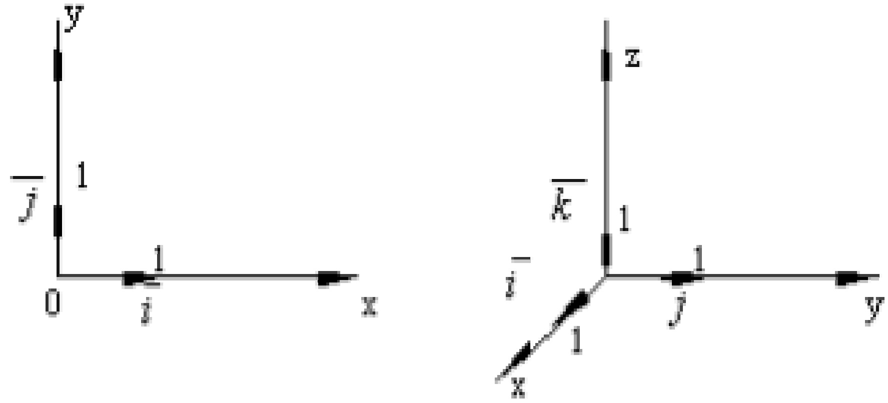
Перша координата називається абсцисою, друга – ординатою, третя – аплікатою.

Аналогічно визначаються декартові координати на площині. Тут точка має тільки двох координат – абсцису й ординату.

Легко бачити, що при заданій системі координат кожна точка має визначені координати. З іншого боку, для кожної трійки чисел найдеться єдина точка, що має ці числа як координати.

Якщо вектори, узяті як базис, в обраній системі координат, мають одиничну довжину і попарно перпендикулярні, то система координат називається *Декартовою прямокутною* системою координат. У цьому випадку основні вектори прийнято позначати буквами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а осі координат Ox, Oy і Oz.

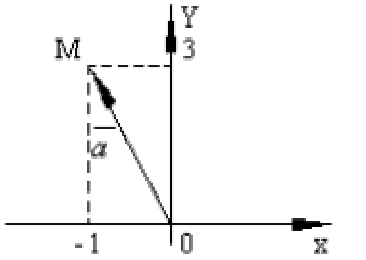
Таким чином, будь–який вектор у декартовій прямокутній системі координат можна записати у вигляді: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Приклади

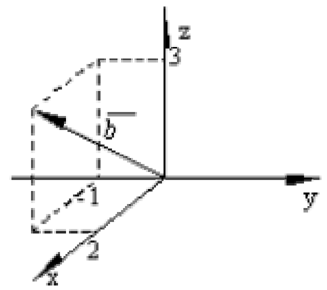
Приклад 1. Побудувати на площині у декартовій системі координат вектор $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Вектор $\vec{a}$ приймемо як радіус–вектор точки $M(-1;3)$.

◄



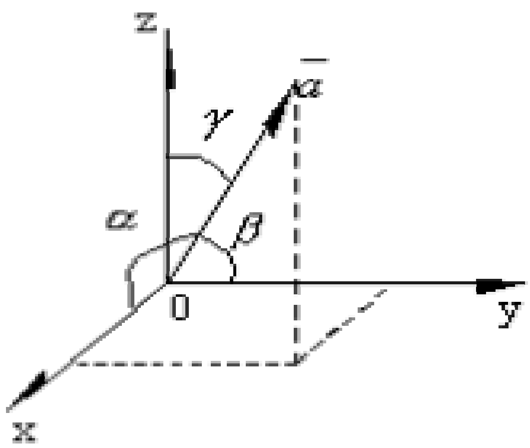
►

Приклад 2. Побудувати вектор $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Вектор $\vec{b}$ приймемо як радіус–вектор точки $N(2; -1; 3)$.



Надалі ми в основному будемо використовувати тільки декартову прямокутну систему координат.

3.8. Направляючі косинуси вектора



Нехай у декартовій прямокутній системі координат заданий вектор $\vec{a}$. Напрямок вектора у просторі визначається кутами α, β, γ які вектор складає з осями координат. Косинуси цих кутів cos α, cos β, cos γ називаються *направляючими косинусами* вектора.

Знайдемо вираз для направляючих косинусів вектора.

Нехай вектор заданий у координатній формі $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Тоді $x = np_{Ox}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha$, відкіля $\cos\alpha = \dfrac{x}{\left|\vec{a}\right|}$.

$y = np_{Oy}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta$, відкіля $\cos\beta = \dfrac{y}{\left|\vec{a}\right|}$.

$z = np_{Oz}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma$, відкіля $\cos\gamma = \dfrac{z}{\left|\vec{a}\right|}$.

Нескладно показати, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Направляючі косинуси вектора цілком визначають його напрямок, але нічого не говорять про його довжину.

3.9. Лінійні операції над векторами у координатній формі

При **множенні** вектора на число всі його координати збільшуються на це число, тобто якщо $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, то $\lambda\vec{a}=\lambda x\vec{i}+\lambda y\vec{j}+\lambda z\vec{k}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.

При **додаванні** векторів їхні відповідні координати складаються, тобто якщо $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ і $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то:

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$$

Умова колінеарності двох векторів у координатній формі.

Два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні. Тобто, якщо $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ і $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Дани вектори $\vec{a}=(2;3;5)$ і $\vec{b}=(3;-2;5)$. Знайти вектор $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$.

◀Знаходимо $2\vec{a}=2\cdot(2;3;5)=(4;6;10)$.

$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}=(4;6;10)-(3;-2;5)=(1;8;5)$.▶

<u>Приклад 2.</u> Написати розкладання вектора $\vec{x}$ по векторах $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$:

$$\vec{x}=\{4,3,-12\},\quad \vec{p}=\{2,1,-1\},\quad \vec{q}=\{1,1,-1\},\quad \vec{r}=\{1,1,-4\}.$$

◀Позначимо координати вектора $\vec{x}$ у новому базисі $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Тоді у новому базисі будемо мати: $\vec{x}=x_1\cdot\vec{p}+x_2\cdot\vec{q}+x_3\cdot\vec{r}$

Підставимо значення координат векторів з умови:

$(4;3;-12)=x_1\cdot(2;1;-1)+x_2\cdot(1;1;-1)+x_3\cdot(1;1;-4)$ або

$(4;3;-12)=(2x_1+x_2+x_3;x_1+x_2+x_3;-x_1-x_2-4x_3)$

Це векторне рівняння відносно $x_1;x_2;x_3$ еквівалентно системі трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=4,\\ x_1+x_2+x_3=3,\\ -x_1-x_2-4x_3=-12.\end{cases}$$

Вирішуємо цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо змінних $x_1;x_2;x_3$ і, таким чином, визначаємо коефіцієнти розкладання вектора $\vec{x}$ по векторах $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$:

Вирішуємо СЛАР методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\-1&-1&-4\end{vmatrix}=-3;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}4&1&1\\3&1&1\\-12&-1&-4\end{vmatrix}=-3$$

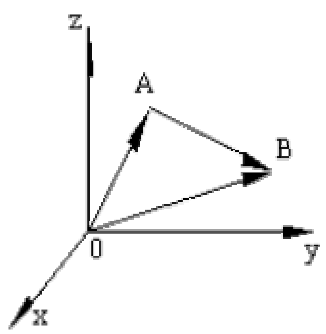
$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&4&1\\1&3&1\\-1&-12&-4\end{vmatrix}=3;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&4\\1&1&3\\-1&-1&-12\end{vmatrix}=-9$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-3}{-3}=1;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{3}{-3}=-1;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-9}{-3}=3.$$

Отже, $\vec{x}=\vec{p}-\vec{q}+3\vec{r}$. ►

3.10. Знаходження координат вектора

Розглянемо дві довільні точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$.



Очевидно, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Але по визначенню координат вектора $\overrightarrow{OA}=(x_1;y_1;z_1)$ і $\overrightarrow{OB}=(x_2;y_2;z_2)$. Отже,

$$\overrightarrow{AB}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}-x_1\vec{i}-y_1\vec{j}-z_1\vec{k}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}.$$

Таким чином, щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, потрібно з координат його кінця відняти відповідні координати початку.

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Задано точки $A(1; -2; 3)$, $B(2; 0; -1)$. Знайти вектор $\overrightarrow{BA}$.

◄ $\overrightarrow{BA}=(1;-2;3)-(2;0;-1)=(-1;-2;4)$. ►

<u>Приклад 2.</u> Дані $A(-2; 3; 1)$, $У(-1; 2; 0)$, $З(0; 1; 1)$. Знайти $\vec{a}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

◄ $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;0)$.

$\vec{a}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(2;-2;-2)+(2;-2;0)=(4;-4;-2)$. ►

<u>Приклад 3.</u> Відомо, що $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$. Знайти координати точки D, якщо

А(3; –4; –1), *У*(–4; 4; 1), *З*(–3; –5; 4).

◀ Знайдемо $\overrightarrow{CA}=(6;1;-5), \overrightarrow{CB}=(-1;9;3)$, тоді

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=(5;10;-8)$.

Позначимо координати точки $D(x;y;z)$, тоді $\overrightarrow{CD}=(x+3;y+5;z-4)$. Отже, повинне виконуватися рівність (x+3; y+5; z–4)=(5;10;–8). Звідси x=2, y=5, z=–4, тобто точка D має координати D(2; 5; –4). ▶

3.11. Індивідуальне завдання № 3.1

Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Написати розкладання вектора $\vec{x}$ по векторах $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

N Вар	Вектор $\vec{x}$			Вектор $\vec{p}$			Вектор $\vec{q}$			Вектор $\vec{r}$		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	–2	4	7	0	1	2	1	0	1	–1	2	4
2	6	12	–1	1	3	0	2	–1	1	0	–1	2
3	1	–4	4	2	1	–1	0	3	2	1	–1	1
4	–9	5	5	4	1	1	2	0	–3	–1	2	1
5	–5	–5	5	–2	0	1	1	3	–1	0	4	1
6	13	2	7	5	1	0	2	–1	3	1	0	–1
7	–19	1	7	0	1	1	–2	0	1	3	1	0
8	3	–3	4	1	0	2	0	1	1	2	–1	4
9	3	3	–1	3	1	0	–1	2	1	–1	0	2
10	–1	7	–4	–1	2	1	2	0	3	1	1	–1
11	6	5	–14	1	1	4	0	–3	2	2	1	–1
12	6	–1	7	1	–2	0	–1	1	3	1	0	4
13	5	15	0	1	0	5	–1	3	2	0	–1	1
14	2	–1	11	1	1	0	0	1	–2	1	0	3
15	11	5	–3	1	0	2	–1	0	1	2	5	–3
16	8	0	5	2	0	1	1	1	0	4	1	2
17	3	1	8	0	1	3	1	2	–1	2	0	–1
18	8	1	12	1	2	–1	3	0	2	–1	1	1
19	–9	–8	–3	1	4	1	–3	2	0	1	–1	2
20	–5	9	–13	0	1	–2	3	–1	1	4	1	0
21	–15	5	6	0	5	1	3	2	–1	–1	1	0
22	8	9	4	1	0	1	0	–2	1	1	3	0
23	23	–14	–30	2	0	1	1	–1	0	–3	2	5
24	3	1	3	2	1	0	1	0	1	4	2	1
25	–1	7	0	0	3	1	1	–1	2	2	–1	0
26	11	–1	4	1	–1	2	3	2	0	–1	1	1

27	–13	3	18	1	1	4	–3	0	2	1	2	–1
28	0	–8	9	0	–2	1	3	1	–1	4	0	1
29	8	–7	–13	0	1	5	3	–1	2	–1	0	1
30	2	7	5	1	0	1	1	–2	0	0	3	1
31	15	–20	–1	0	2	1	0	1	–1	5	–3	2

3.12. Індивідуальне завдання № 3.2

Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

З'ясувати колінеарність або не колінеарність векторів $\vec{c_1}$ і $\vec{c_2}$, побудованих по векторах $\vec{c_1} = \mu_1 \cdot \vec{a} + \eta_1 \cdot \vec{b}$ і $\vec{c_2} = \mu_2 \cdot \vec{a} + \eta_2 \cdot \vec{b}$.

N Вар	Вектор $\vec{a}$			Вектор $\vec{b}$			μ_1	η_1	μ_2	η_2
	x	y	z	x	y	z				
1	1	–2	3	3	0	–1	2	4	–1	3
2	1	0	1	–2	3	5	1	2	3	–1
3	–2	4	1	1	–2	7	5	3	2	–1
4	1	2	–3	2	–1	–1	4	3	8	–1
5	3	5	4	5	9	7	–2	1	3	–2
6	1	4	–2	1	1	–1	1	1	4	2
7	1	–2	5	3	–1	0	4	–2	–2	1
8	3	4	–1	2	–1	1	6	–3	–2	1
9	–2	–3	–2	1	0	5	3	9	–1	–3
10	–1	4	2	3	–2	6	2	–1	–6	3
11	5	0	–1	7	2	3	2	–1	–6	3
12	0	3	–2	1	–2	1	5	–2	3	5
13	–2	7	–1	1	–2	1	5	–2	3	5
14	3	7	0	1	–3	4	4	–2	–2	1
15	–1	2	–1	2	–7	1	6	–2	–3	1
16	7	9	–2	5	4	3	4	–1	–1	4
17	5	0	–2	6	4	3	5	–3	–10	6
18	8	3	–1	4	1	3	2	–1	–4	2
19	3	–1	6	5	7	10	4	–2	–2	1
20	1	–2	4	7	3	5	6	–3	–2	1
21	3	7	0	4	6	–1	3	2	5	–7
22	2	–1	4	3	–7	–6	2	–3	3	–2
23	5	–1	–2	6	0	7	3	–2	–6	4
24	–9	5	3	7	1	–2	2	–1	3	5
25	4	2	9	0	–1	3	–3	4	4	–3
26	2	–1	6	–1	3	8	5	–2	2	–5
27	5	0	8	–3	1	7	3	–4	–9	12

28	–1	3	4	2	–1	0	6	–2	–3	1
29	4	2	–7	5	0	–3	1	–3	–2	6
30	2	0	–5	1	–3	4	2	–5	5	–2
31	–1	2	8	3	7	–1	4	–3	–12	9

3.13. Поняття власних чисел і власних векторів матриці

Нехай задана квадратна матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – якась матриця–стовпець, висота якої збігається з порядком матриці A.

У багатьох задачах приходиться розглядати рівняння відносно X:

$$AX=\lambda X\,,$$

де λ – деяке число. Зрозуміло, що при будь–якому λ це рівняння має нульове рішення:

$$X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0\,.$$

Число λ, при якому це рівняння має ненульові рішення, називається *власним значенням* матриці A, а X при такому λ називається *власним вектором* матриці A.

З визначення випливає, що власний вектор під дією лінійного оператора A переходить у вектор, колінеарний самому собі, тобто просто збільшується на деяке число. У той же час невласні вектори перетворяться більш складним чином. У зв'язку з цим поняття власного вектора є дуже корисним і зручним при вивченні багатьох питань матричної алгебри і її додатків.

3.14. Методи знаходження власних чисел і власних векторів матриці. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Знайдемо власний вектор матриці A. Оскільки $E\cdot X = X$, то матричне рівняння можна переписати у вигляді $AX=\lambda EX$ або $\left(A-\lambda E\right)X=0$.

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

У розгорнутому вигляді це рівняння можна переписати у вигляді системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Отже, одержали систему однорідних лінійних рівнянь для визначення координат x_1, x_2, x_3 вектору X. Щоб система мала ненульові рішення необхідно і досить, щоб визначник системи дорівнював нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } |A-\lambda E| = 0.$$

Це рівняння 3–го ступеня відносно λ. Воно називається *характеристичним рівнянням* матриці A і служить для визначення власних значень λ.

Кожному власному значенню λ відповідає власний вектор X, координати якого визначаються із системи при відповідному значенні λ.

Приклади

Приклад 1. Знайти власні вектори і відповідні їм власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

◄ Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Розкриваючи визначник, одержуємо квадратне рівняння, з якого знайдемо власні значення:

$$\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-8=0\right] \Rightarrow \left[\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0\right] \qquad \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 5.$$

При $\lambda_1 = -1$.

Підставляємо у характеристичне рівняння це значення та одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Останнє рівняння системи звернулося в нуль, і система стала недовизначеної – два рівняння на три невідомих. Ранги основної матриці системи і розширеної матриці збігаються (рівні 1), але менше розмірності системи (кількості невідомих рівних 2), тобто:

$$\text{rang } A = \text{rang } A^* < n.$$

Запишемо рішення системи у такий спосіб:

$$\begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = -2x_1 = -2C \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix}, \text{ де } C \in R.$$

При C=1, частинне рішення $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 5$.

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = 4x_1 = 4C \end{cases} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} C \\ 4C \end{pmatrix}, \text{ де } C \in R.$$

При C=1, частинне рішення $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. ►

Приклад 2. Знайти рішення прикладу 1 за допомогою пакета **Maxima.**

◄ Для обчислення власних значень і власних векторів із застосуванням пакета **Maxima** необхідно за допомогою оператора **Matrix** ввести матрицю, що буде обчислюватися. Усі математичні вирази повинні закінчуватися крапкою з комою, крім тих випадків, коли не потрібно результат виводити на екран (у цьому випадку вирази закінчуються знаком $. У будь–якому випадку уведення завершується натисканням клавіші **Enter**.

Щоб знайти **власні значення** матриці необхідно використовувати функцію **eigenvalues (A)**. Ця функція відображає список, що складається із двох підсписків. Перший підсписок – це власні значення матриці A, а другий підсписок – це ступінь складності власних значень у відповідному порядку.

Функція **eigenvalues** викликає функцію **solve**, щоб знайти коріння характерного багаточлена матриці. Іноді функція **solve** не здатна знайти коріння багаточлена; у такому випадку деякі інші функції в цьому пакеті (за винятком **innerproduct**, **unitvector**, **columnvector** і **gramschmidt**) не будуть працювати. У деяких випадках функція **solve** не може знайти власні значення через те, що вони є комплексними числами.

Щоб знайти **власні вектори** матриці необхідно використовувати функцію **eigenvectors (A)**. Ця функція використає матрицю A як її аргумент, і відображає список, у якому перший підсписок – це власні значення матриці, а інші підсписки – це власні вектори матриці, що відповідають цим власним значенням.

Існують деякі параметри, що використовуються разом з функцію **eigenvectors**:

nondiagonalizable показує **true(істина)** або **false(неправда)** залежно від того чи є матриця A недіагональною, або діагональною після знаходження власних векторів матриці.

hermitianmatrix (використовується при значенні **true**) перетворює вироджені власні вектори матриці в ортогональні, використовуючи алгоритм Грэм–Шмидта.

knowneigvals (використовується при значенні **true**) викликає **eigen** пакет, щоб припустити, що власні значення матриці відомі користувачеві й запам'ятовані під глобальним ім'ям **listeigvals**.

listeigvals потрібно встановити у вигляді списку, подібного до списку відображеному при знаходженні власних значень.

Функція **algsys** використовується при знаходженні власних векторів. Іноді, якщо власні значення безладні, **algsys** не здатний знайти рішення. У деяких випадках, можливо спростити власні значення першим пошуком при використанні команди **eigenvalues**, а потім використати інші функції, щоб привести їх до більш простого вигляду. Наступне спрощення власних векторів матриці може бути викликане знову параметром **knowneigvals** (при параметрі **nondiagonalizable** значення **true**). ►

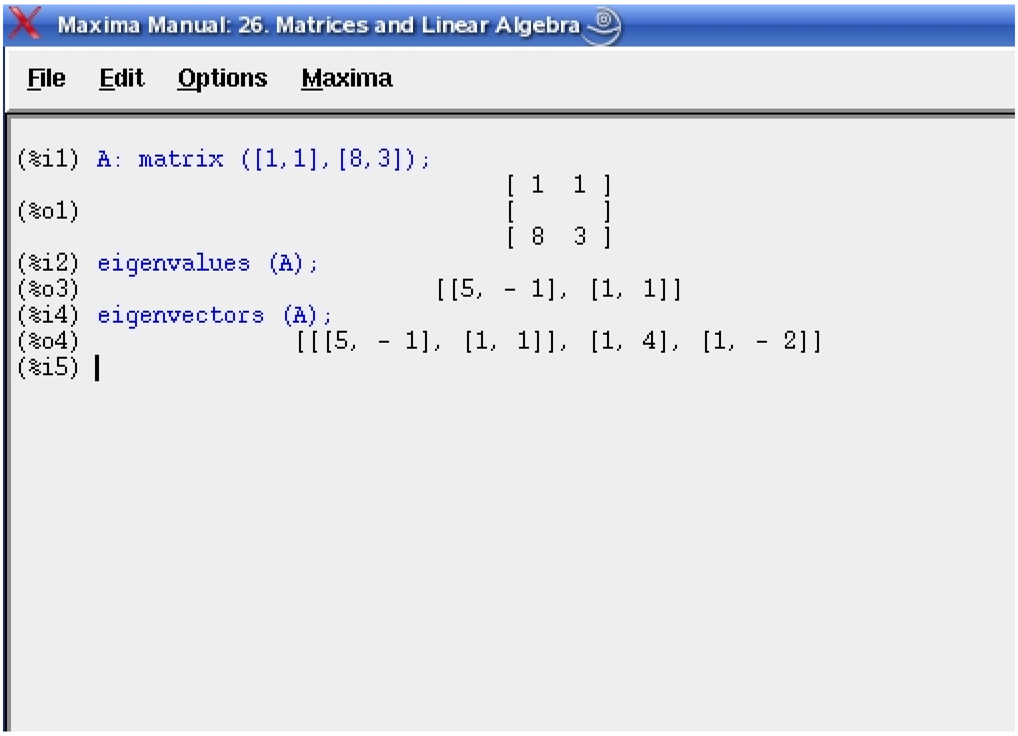


Рис. 5.1. Побудова власних значень і власних векторів матриці

Таким чином, одержимо власні значення матриці А: $\lambda_1 = 5; \lambda_2 = -1$, і власні вектори: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Знайти власні вектори і відповідні їм власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

◄ Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриваємо визначник розкладанням по першому рядку:

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-1\right)-2\lambda+1 =$$
$$= \lambda^2-\lambda-1-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-2\lambda+1 = \lambda\left(-\lambda^2+2\lambda-2\right) = 0 .$$

Оскільки вираз у дужках не має рішень, тому що дискримінант $D = b^2-4ac = 2^2-4\cdot 2 = -4 < 0$, то маємо єдине рішення $\lambda = 0$.

Підставляючи власне значення у характеристичне рівняння, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = C \\ x_3 = 3x_2 = 3C \\ C \in R \end{cases} \Rightarrow \; X = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 3C \end{pmatrix}.$$

При C=1, частинне рішення $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. ►

<u>Приклад 4.</u> Знайти представлення матриці A у базисі, утвореному її власними векторами: $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -0{,}5 & -2 \end{bmatrix}$.

◄ Якщо усі власні значення різні, то безліч власних векторів можна вибрати за базис векторного простору. У цьому базисі лінійне перетворення описується діагональною матрицею:

$$\widehat{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ -0{,}5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкривши визначник знаходимо корені квадратного рівняння:

$$(-3-\lambda)\cdot(-2-\lambda)-(-4)\cdot(-0{,}5)=0$$

$$\left\{(3+\lambda)\cdot(2+\lambda)-2=0\right\}\Rightarrow\left\{6+3\lambda+2\lambda+\lambda^2-2=0\right\}\Rightarrow\left\{\lambda^2+5\lambda+4=0\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\lambda_1=-1;\quad \lambda_2=-4\right\} \text{ – власні значення.}$$

Тепер представимо матрицю A у базисі, утвореному її власними векторами: $\widehat{A}=\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{Vmatrix}$.►

Як приклад математичної моделі економічного процесу, що приводиться до поняття власного вектора і власного значення матриці, розглянемо **лінійну модель обміну** (модель міжнародної торгівлі).

Нехай мається n країн $S_1, S_2, \ldots, S_n$ національний доход кожної з яких дорівнює відповідно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Позначимо коефіцієнтами a_{ij} частку національного доходу, що країна S_j витрачає на покупку товарів у країни S_i. Будемо вважати, що весь національний доход витрачається на закупівлю товарів або усередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1\,(j=1, 2, \ldots, n).$$

Розглянемо матрицю $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$,

що одержала назву *структурної матриці торгівлі*. Відповідно до формули $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$, сума елементів будь–якого стовпця матриці A дорівнює 1.

Для будь–якої країни S_i ($i=1, 2, \ldots, n$) виторг від внутрішньої і зовнішньої торгівлі складе:

$$p_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n.$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i, тобто виторг від торгівлі кожної країни повинний бути не менше її національного доходу: $p_i \ge x_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

Якщо вважати, що $p_i \ge x_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$), то одержуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \geq x_n. \end{cases}$$

Склавши і згрупувавши всі нерівності останньої системи, одержимо:

$$x_1\left(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}\right) + x_2\left(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + x_n\left(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}\right) \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n\,.$$

З огляду на $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, вираження в дужках рівні одиниці, і ми приходимо до суперечливої нерівності: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Таким чином, нерівність $p_i \geq x_i$ (i=1, 2,…, n) неможлива, і умова $p_i \geq x_i$ приймає вид $p_i = x_i$ (i=1, 2,…, n). З економічної точки зору це зрозуміло, тому що всі країни не можуть одночасно діставати прибуток.

Уводячи вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ національних доходів країн, одержимо рівняння: $AX = X$, або $AX = \lambda X$, тобто задача звелася до відшукання власного вектора матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

<u>Приклад</u>

Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

◄ Знаходимо власний вектор x, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Для цього вирішуємо рівняння $(A - \lambda E)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1/3-1 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2-1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0-1 \end{pmatrix} = 0, \text{ або } \begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Вирішуючи останню систему методом Гаусса знаходимо: $x_1 = \left(3/2\right)C$, $x_2 = 2C$, $x_3 = C$.

Отриманий результат означає, що збалансованість торгівлі трьох країн досягається при векторі національних доходів $x=\left(3/2C;2C;C\right)$, тобто при співвідношенні національних доходів країн 1,5:2:1. ►

3.15. Індивідуальне завдання № 3.3

Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Знайти власні числа і власні вектори матриці *A*. Знайти представлення матриці *A* у базисі, створеному її власними векторами.

Вар	Завдання	Вар	Завдання
1.	$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$	**2.**	$\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
3.	$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$	**4.**	$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -14,4 & -11 \end{bmatrix}$
5.	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -28 & -10 \end{bmatrix}$	**6.**	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -40 & -13 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2,4 & -6 \end{bmatrix}$	**8.**	$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$
9.	$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$	**10.**	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$
11.	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5,6 & -8 \end{bmatrix}$	**12.**	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$
13.	$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3,6 & -7 \end{bmatrix}$	**14.**	$\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -3,6 & 2 \end{bmatrix}$
15.	$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -17,5 & -11 \end{bmatrix}$	**16.**	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -13,5 & -10 \end{bmatrix}$
17.	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$	**18.**	$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
19.	$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix}$	**20.**	$\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -0,5 & -2 \end{bmatrix}$
21.	$\begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$	**22.**	$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$
23.	$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$	**24.**	$\begin{bmatrix} -11 & -14,4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

25.	$\begin{bmatrix} -10 & -28 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	**26.**	$\begin{bmatrix} -13 & -40 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
27.	$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$	**28.**	$\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
29.	$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$	**30.**	$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -14{,}4 & -11 \end{bmatrix}$
31.	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -28 & -10 \end{bmatrix}$		

3.16. Поняття квадратичної матриці і квадратичної форми

При рішенні різних прикладних задач часто приходиться досліджувати квадратичні форми.

Визначення. Квадратичною формою $L(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ від n змінних називається сума, кожен член якої є або квадратом однієї зі змінних, або добутком двох різних змінних, узятих з деяким коефіцієнтом:

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ .$$

Припускаємо, що коефіцієнти квадратичної форми – дійсні числа, причому $a_{ij} = a_{ji}$. Нагадаємо, що така матриця називається симетричною. Матриця $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1,2,\ldots, n)$, складена з цих коефіцієнтів, називається *матрицею квадратичної форми*. Її діагональні елементи дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, а інші елементи – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми.

У матричному записі квадратична форма має вигляд:

$$L = X^T A X \ ,$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця–стовпець змінних, а $X^T = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – матриця–рядок змінних.

Справді, якщо перемножити матрицю–рядок X^T розмірністю 1 х n на матрицю квадратичної форми A розмірністю n х n одержимо матрицю–рядок розмірністю 1 х n, що при множенні на матрицю–стовпець X розмірністю n х 1 дає квадратичну форму розмірністю 1 х 1:

$$L = \underset{1\text{x}n}{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}} \underset{n\text{x}n}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}} \underset{n\text{x}1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j1}x_i & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j2}x_i & \dots & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jn}x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j1}x_i x_1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j2}x_i x_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jn}x_i x_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j .$$

Приклад

Дана квадратична форма $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$. Записати її у матричному вигляді.

◄ Знайдемо матрицю квадратичної форми. Оскільки діагональні елементи цієї матриці дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, тобто 4, 1, –3, а інші елементи – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми, то:

$$L = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \blacktriangleright$$

З'ясуємо, як змінюється квадратична форма при невиродженому лінійному перетворенні змінних.

Нехай матриці–стовпці змінних $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ і $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ зв'язані лінійним співвідношенням $X = CY$, де $C = (c_{ij})$ $(i, j = 1,2,\dots, n)$ – є деяка невироджена матриця n–*го* порядку. Тоді квадратична форма $L = X^T AX$ прийме вигляд:

$$L = (CY)^T A(CY) = (Y^T C^T) A(CY) = Y^T (C^T AC) Y ,$$

або $L = Y^T A^* Y$, де $A^* = C^T AC$.

Транспонування добутку матриць проводимо по формулі $(CY)^{\mathrm{T}} = (Y^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}})$(див. властивість добутку транспонованих матриць розділу «Лінійна алгебра»).

Отже, при невиродженому лінійному перетворенні $X = CУ$ матриця квадратичної форми приймає вигляд: $A^* = C^T AC$.

Приклад

Дано квадратичну форму $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$. Знайти квадратичну форму $L(y_1, y_2)$ отриману з даної лінійним перетворенням $x_1 = 2y_1 - 3y_2;\quad x_2 = y_1 + y_2$.

◄ Матриці–стовпці змінних $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ і $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ зв'язані лінійним співвідношенням $X = CУ$, де $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ матриця 2–го порядку.

Перевірка: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - 3y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ – умова виконується.

Матриця даної квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Матриця шуканої квадратичної форми $L(y_1, y_2) = Y^T A^* Y$.

Знайдемо матрицю

$$A^* = C^T AC = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix},$$

а оскільки діагональні елементи нової квадратичної форми дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, а інші елементи – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми, то маємо: $L(y_1, y_2) = 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_2^2$. ►

3.17. Канонічний вигляд квадратичної форми

Слід зазначити, що при деяких вдало обраних лінійних перетвореннях вигляд квадратичної форми можна істотно спростити.

Квадратична форма $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ називається *канонічною* (або має *канонічний вигляд*), якщо всі її коефіцієнти $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2,$$

а її матриця є діагональною.

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Будь–яка квадратична форма за допомогою невиродженого лінійного перетворення змінних може бути приведена до канонічного вигляду.

3.18. Приведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Привести квадратичну форму до канонічного вигляду означає перетворити первинну форму так, щоб коефіцієнти при добутках двох різних змінних дорівнювали нулю. Або інакше, квадратична форма називається канонічною, якщо всі елементи матриці квадратичної форми, крім основної діагоналі, дорівнюють нулю.

Канонічний вигляд квадратичної форми не є однозначно визначеним, тому що та сама квадратична форма може бути приведена до канонічного вигляду декількома способами. Будемо розглядати два способи приведення до канонічного вигляду: метод Лагранжа й ортогональне перетворення.

Метод Лагранжа заснований на послідовному перетворенні у квадрати суми (різниці) змінних первинної квадратичної форми $L\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$. Потім виробляється заміна змінних $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ на $\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$ за допомогою невироджених лінійних перетворень $y_i = f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$. Таким чином, первинна квадратична форма $L\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ приводиться до канонічного вигляду $L_1\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$.

<u>Приклад</u>

Квадратичну форму привести до канонічного вигляду методом Лагранжа $L\left(x_1,x_2\right)=3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2$.

◄ Спочатку виділимо повні квадрати суми (різниці) змінних $\left(x_1,x_2\right)$:

$$L\left(x_1,x_2\right)=3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2=\left(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\right)+2x_1^2+2x_2^2=$$

$$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)+\left(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\right)=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_1-x_2\right)^2=$$

$$2\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_1+x_2\right)^2$$

Одержуємо невироджене лінійне перетворення $y_1=x_1-x_2$; $y_2=x_1+x_2$.

При зазначеному невиродженому лінійному перетворенні первинна квадратична форма прийме нижчеподаний канонічний вигляд: $L_1\left(y_1,y_2\right)=2y_1^2+y_2^2$.►

Зауваження. У загальному випадку необхідно послідовно, починаючи з першої змінної, виділяти квадрати при змінних, коефіцієнти, при квадраті яких відмінні від нуля.

<u>Приклад</u>

Квадратичну форму привести до канонічного вигляду методом Лагранжа $L(x_1,x_2)=2x_1^2-6x_1x_2+10x_2^2$.

◀ Винесемо за дужки загальний множник і виділимо повний квадрат різниці змінних (x_1,x_2):

$$L(x_1,x_2)=2x_1^2-6x_1x_2+10x_2^2=2\left[x_1^2-2x_1\left(\frac{3}{2}x_2\right)+\left(\frac{3}{2}x_2\right)^2+5x_2^2-\left(\frac{3}{2}x_2\right)^2\right]=$$

$$=2\left[\left(x_1-\frac{3}{2}x_2\right)^2+\left(5-\frac{9}{4}\right)x_2^2\right]=2\cdot\left(x_1-\frac{3}{2}x_2\right)^2+\frac{11}{2}x_2^2.$$

Одержуємо невироджене лінійне перетворення $y_1=x_1-\frac{3}{2}x_2$; $y_2=x_2$.

При зазначеному невиродженому лінійному перетворенні первинна квадратична форма прийме нижчеподаний канонічний вигляд: $L_1(y_1,y_2)=2\cdot y_1^2+\frac{11}{2}\cdot y_2^2$.

Перевірка: $2\cdot y_1^2+\frac{11}{2}\cdot y_2^2=2\cdot\left(x_1-\frac{3}{2}x_2\right)^2+\frac{11}{2}{x_2}^2=$

$$=2\left(x_1^2-3x_1x_2+\frac{9}{4}x_2^2\right)+\frac{11}{2}x_2^2=2x_1^2-6x_1x_2+\frac{20}{2}x_2^2=2x_1^2-6x_1x_2+10x_2^2.$$ ▶

Ортогональне перетворення – це лінійне перетворення векторного простору, що зберігає незмінними одиничну довжину базисних векторів. Ортогональне перетворення здійснюється за допомогою власних значень і власних векторів первинної квадратичної форми $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$L=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_n\end{pmatrix},$$

де $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – власні числа первинної квадратичної форми, $y_1,y_2,\ldots,y_n$ – власні вектора первинної квадратичної форми.

У матричному видгляді $L=Y^T\widehat{A}Y$,

де $\widehat{A}$ – матриця первинної квадратичної форми в базисі, утвореному її власними векторами, Y – матриця–стовпець перемінних, що складаються з власних векторів первинної квадратичної форми.

Таким чином, первинна квадратична форма прийме нижчеподаний канонічний вид: $L(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+,\ldots,\lambda_ny_n^2$. При цьому довжина базисних векторів повинна дорівнювати одиниці: $|y_1|=|y_2|=,\ldots,=|y_n|=1$.

Приклад

Квадратичну форму привести до канонічного вигляду ортогональним перетворенням $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2$.

◄ Знайдемо матрицю первинної квадратичної форми. Її діагональні елементи дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, тобто 2, 10, а інші елементи – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми, тобто $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$.

Складаємо характеристичне рівняння для матриці A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваємо визначник $(2-\lambda)(10-\lambda) - (-3)(-3) = 0$,

$$20 - 2\lambda - 10\lambda + \lambda^2 - 9 = 0.$$

Вирішуємо квадратне рівняння і знаходимо власні числа:

$\left[\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0\right] \Rightarrow [\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 11]$

Знаходимо власні вектора:

$$\lambda_1 = 1: \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = \dfrac{x_1}{3} = \dfrac{C}{3} \end{cases} \Rightarrow y_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Для визначення постійної C_1 запишемо вираз для довжини вектора y_1 через його координати і дорівняємо його одиниці, як це потрібно в постановці задачі ортогонального перетворення:

$$|y_1| = C_1 \cdot \sqrt{1^2 + \left(1/3\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}} C_1 = 1. \text{ Звідси } C_1 = \sqrt{\frac{9}{10}}.\ y_1 = \sqrt{\frac{9}{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 11: \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_2 \\ x_2 = -3x_1 = -3Ñ_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знаходимо C_2 і y_2:

$$|y_2| = C_2 \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} C_1 = 1. \text{ Звідси } C_2 = \sqrt{\frac{1}{10}}.\ y_1 = \sqrt{\frac{9}{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо невироджене лінійне перетворення: $y_1 = \sqrt{\frac{9}{10}}\left(x_1 + \frac{x_2}{3}\right)$, $y_2 = \sqrt{\frac{1}{10}}\left(x_1 - 3x_2\right)$.

При зазначеному невиродженому лінійному перетворенні первинна квадратична форма прийме нижчеподаний канонічний вигляд: $L_1\left(y_1, y_2\right) = y_1^2 + 11 \cdot y_2^2$.

Перевірка: $y_1^2 + 11 \cdot y_2^2 = 1 \cdot \left[\sqrt{\frac{9}{10}}\left(x_1 + \frac{x_2}{3}\right)\right]^2 + 11\left[\sqrt{\frac{1}{10}}\left(x_1 - 3x_2\right)\right]^2 =$

$= \frac{9}{10}\left(x_1^2 + \frac{2x_1x_2}{3} + \frac{x_2^2}{9}\right) + \frac{11}{10}\left(x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2\right) = \frac{20}{10}x_1^2 + \frac{6-66}{10}x_1x_2 + \frac{100}{10}x_2^2 =$

$= 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2$.►

3.19. Індивідуальне завдання № 3.4

Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Привести квадратичну форму $L\left(x_1, x_2\right)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа й ортогональним перетворенням.

Вар	**Завдання**	**Вар**	**Завдання**
1.	$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$	**2.**	$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$
3.	$-2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$	**4.**	$-3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$
5.	$4x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$	**6.**	$6x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
7.	$4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$	**8.**	$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$
9.	$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$	**10.**	$8x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$
11.	$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$	**12.**	$-4x_1^2 + 6x_1x_2 - 8x_2^2$
13.	$6x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$	**14.**	$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$
15.	$2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_2^2$	**16.**	$-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$
17.	$3x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2$	**18.**	$-3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$
19.	$5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2$	**20.**	$-4x_1^2 + 6x_1x_2 - 6x_2^2$
21.	$3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$	**22.**	$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 10x_2^2$
23.	$-4x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$	**24.**	$6x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_2^2$
25.	$-4x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2$	**26.**	$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$
27.	$4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$	**28.**	$8x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$

29.	$6x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2$	**30.**	$-3x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$
31.	$6x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$		

3.20. Визначеність квадратичних форм

Отримані різними способами канонічні форми мають загальну властивість, що має вигляд теореми.

Теорема (закон інерції квадратичних форм). Число доданків з позитивними (негативними) коефіцієнтами первинної квадратичної форми дорівнює числу цих доданків у приведеній квадратичній формі канонічного вигляду і не залежить від способу приведення форми до цього вигляду.

Наприклад, у прикладах розглянутих вище, та сама квадратична форма різними способами була приведена до різного вигляду:

$$L_1(y_1,y_2)=2y_1^2+\frac{11}{2}y_2^2 \text{ і } L_2(y_1,y_2)=y_1^2+11\cdot y_2^2.$$

Як бачимо, у обох квадратичних форм присутні тільки позитивні коефіцієнти.

Слід зазначити, що ранг матриці квадратичної форми, називаний рангом квадратичної форми, дорівнює числу відмінних від нуля коефіцієнтів канонічної форми і не міняється при лінійних перетвореннях.

Квадратична форма називається *додатно* визначеною, якщо при всіх значеннях змінних, з яких хоча б одне відмінно від нуля $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)>0$.

Квадратична форма $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називається *від'ємно* визначеною, якщо при всіх значеннях змінних, з яких хоча б одне відмінно від нуля $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)<0$.

Так, наприклад, квадратична форма $L_1=3x_1^2+4x_2^2+9x_3^2$ є додатно визначеною, оскільки при будь–яких значеннях змінних значення вираз буде позитивним. А форма $L_2=-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2$ – від'ємно визначеної, тому що при її алгебраїчному перетворенні $L_2=-\left(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\right)=-\left(x_1-x_2\right)^2$ при будь–яких значеннях змінних значення виразу буде негативним.

Правило знаків діагональних елементів матриці квадратичної форми канонічного вигляду

Для того щоб квадратична форма канонічного вигляду $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ була *додатно* (*від'ємно*) визначеною, необхідно і досить, щоб усі власні значення λ_i, матриці *A* були позитивні (негативні).

У ряді випадків, наприклад, коли матриця первинної квадратичної форми має порядок більш двох, для встановлення знаковизначеності квадратичної форми зручніше буває застосувати критерій Сильвестра.

Критерій Сильвестра. Для того щоб квадратична форма була додатно визначеною, необхідно і недостатньо, щоб усі головні мінори матриці цієї форми були позитивні, тобто $M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_n > 0$, де:

$$M_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Головний мінор *n–го* порядку дорівнює визначникові всієї матриці.

Слід зазначити, що для від'ємно визначених квадратичних форм знаки головних мінорів чергуються, починаючи зі знака «мінус» для мінору першого порядку.

Крім додатно і від'ємно визначених квадратичних форм існують *невід'ємні* і *недодатні*, а також *знаконевизначені* квадратичні форми. Для більшої наочності, усі можливі випадки визначеності квадратичних форм зведемо у таблицю 1.

Таблиця 1.

Види визначеності квадратичних форм

№ п/п	Вид визначеності	Значення власних чисел у канонічному вигляді квадратичної форми	Значення головних діагональних мінорів первинної квадратичної форми ($i = 1,2,\ldots, n$)
1.	Додатно визначена	$\lambda_i > 0$	$M_i > 0$
2.	Невід'ємно визначена	$\lambda_i \geq 0$	$M_i \geq 0$
3.	Від'ємно визначена	$\lambda_i < 0$	$\begin{cases} M_i < 0 \text{ при непарному } i \\ M_i > 0 \text{ при парному } i \end{cases}$
4.	Недодатно визначена	$\lambda_i \leq 0$	$\begin{cases} M_i \leq 0 \text{ при непарному } i \\ M_i \geq 0 \text{ при парному } i \end{cases}$
5.	Знаконевизначена	при інших співвідношеннях	при інших співвідношеннях

Приклади

Приклад 1. Оцінити визначеність квадратичної форми:

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

◀ *Перший спосіб.* Знайдемо матрицю квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A характеристичне рівняння

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник по третьому рядку маємо:

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ або } (3-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda) - 1\right] = 0.$$

Розкриваємо дужки маємо:

$$(3-\lambda)\left(4 - 5\lambda + \lambda^2\right) = 0 \text{ або } (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) = 0.$$

Перші дужки дають перший корінь $\lambda_1 = 3$. Вирішуємо квадратне рівняння у других дужках і знаходимо $\lambda_2 = 4$; $\lambda_3 = 1$.

Так як корені характеристичного рівняння матриці A позитивні, то на підставі приведеної теореми квадратична форма $L(x_1, x_2, x_3)$ – додатно визначена.

Другий спосіб. Знайдемо головний мінор першого порядку матриці A:

$$|1| = 1 > 0.$$

Знайдемо головний мінор другого порядку матриці A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Знайдемо головний мінор третього порядку матриці A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 = 9 > 0.$$

Так як всі головні мінори матриці A позитивні, то за критерієм Сильвестра дана квадратична форма $L(x_1, x_2, x_3)$ додатно визначена. ▶

<u>Приклад 2.</u> Привести квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа й оцінити визначеність:

а) первинного вигляду – за критерієм Сильвестра;

б) канонічного вигляду – по знаках діагональних елементів отриманої матриці квадратичної форми:

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 3x_3^2.$$

◀ Виділимо повний квадрат першої змінної x_1:

$$L(x_1,x_2,x_3)=2\left[x_1^2+2x_1\left(x_2+\frac{x_3}{2}\right)+\left(x_2+\frac{x_3}{2}\right)^2\right]-2\left(x_2+\frac{x_3}{2}\right)^2+3x_2^2-4x_2x_3-3x_3^2=$$

$$=2\left(x_1+x_2+\frac{x_3}{2}\right)^2-2\left(x_2^2+x_2x_3+\frac{x_3^2}{4}\right)+3x_2^2-4x_2x_3-3x_3^2.$$

Нехай $y_1=x_1+x_2+\frac{x_3}{2}$, тоді:

$$L(y_1,x_2,x_3)=2y_1^2-2x_2^2-2x_2x_3-\frac{x_3^2}{2}+3x_2^2-4x_2x_3-3x_3^2=$$

$$=2y_1^2+x_2^2-6x_2x_3-\frac{7}{2}x_3^2$$

Виділимо повний квадрат другої змінної x_2:

$$L(y_1,x_2,x_3)=2y_1^2+\left[x_2^2-2x_2(3x_3)+(3x_3)^2\right]-(3x_3)^2-\frac{7}{2}x_3^2=$$

$$=2y_1^2+(x_2-3x_3)^2-9x_3^2-\frac{7}{2}x_3^2.$$

Нехай $y_2=x_2-3x_3$, тоді одержимо:

$$L(y_1,y_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-\frac{25}{2}x_3^2.$$

Якщо тепер позначити $y_3=x_3$, то одержуємо невироджене лінійне перетворення $y_1=x_1+x_2+\frac{x_3}{2}$; $y_2=x_2-3x_3$; $y_3=x_3$.

При зазначеному невиродженому лінійному перетворенні первинна квадратична форма прийме нижчеподаний канонічний вигляд: $L(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+y_2^2-\frac{25}{2}x_3^2$.

а) оцінимо визначеність первинної квадратичної форми за критерієм Сильвестра:

Знайдемо матрицю первинної квадратичної форми:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&-2\\1&-2&-3\end{pmatrix}.$$

Знайдемо головний мінор першого порядку матриці A:

$$|2|=2>0.$$

Знайдемо головний мінор другого порядку матриці A:

$$\begin{vmatrix}2&2\\2&3\end{vmatrix}=6-4=2>0.$$

Знайдемо головний мінор третього порядку матриці A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 49 = -25 < 0 .$$

Оскільки у чергуванні знаків головних мінорів немає визначеного порядку, то за критерієм Сильвестра первинна квадратична форма $L(x_1, x_2, x_3)$ знаконевизначена.

б) оцінимо визначеність квадратичної форми канонічного вигляду – по знаках діагональних елементів.

Канонічна квадратична форма має вигляд:

$L(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + y_2^2 - \dfrac{25}{2}x_3^2$ або у вигляді діагональної матриці:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25/2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки у чергуванні знаків діагональних елементів немає визначеного порядку, то по знаках діагональних елементів канонічна квадратична форма $L(y_1, y_2, y_3)$ знаконевизначена. ►

3.21. Індивідуальне завдання № 3.5

Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Привести квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа й оцінити визначеність:

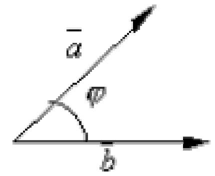
а) первинного вигляду – за критерієм Сильвестра;

б) канонічного вигляду – по знаках діагональних елементів отриманої матриці квадратичної форми.

Вар	**Завдання**	**Вар**	**Завдання**
1.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$	**2.**	$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$
3.	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$	**4.**	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$
5.	$4x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_3^2$	**6.**	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$
7.	$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$	**8.**	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$
9.	$x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$	**10.**	$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$
11.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$	**12.**	$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$
13.	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$	**14.**	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$
15.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$	**16.**	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$
17.	$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$	**18.**	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$

19.	$x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$	**20.**	$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$
21.	$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_3^2$	**22.**	$4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$
23.	$4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$	**24.**	$4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$
25.	$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$	**26.**	$4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-2x_3^2$
27.	$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-2x_3^2$	**28.**	$4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$
29.	$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$	**30.**	$4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$
31.	$x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$		

3.22. Скалярний добуток векторів і його властивості



Ми розглянули множення вектора на число. Однак у багатьох задачах зустрічається операція множення вектора на вектор. Але при цьому результат може бути як числом, так і вектором. Тому розглядають два види множення векторів: скалярне і векторне.

Нехай дані два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між, якими дорівнює $\varphi=\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, рівне добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$.

Якщо один з векторів нульовий, то кут не визначений, і скалярний добуток до визначення вважається рівним нулю.

Розглянемо **властивості** скалярного добутку.

1. Скалярний добуток двох векторів підкоряється комутативному законові, тобто для будь–яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. Для будь–якого числа λ і будь–яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо:

$$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right).$$

3. Для будь–яких векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ виконується рівність:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

4. Для будь–якого вектора $\vec{a}$ виконується співвідношення $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$.

З цієї властивості зокрема випливає $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

5. Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді,

коли дорівнює нулю один зі співмножників або вектори перпендикулярні.

Це властивість очевидна з визначення скалярного добутку.

Таким чином, **необхідною і достатньою умовою ортогональності** двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку.

Приклад

Дано вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\widehat{\vec{a};\vec{b}} = 60^0$. Знайти $|\vec{c}|$.

◄ Маємо $\vec{c}^{\,2} = |\vec{c}|^2$, тобто $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}}$.

Знайдемо:

$\vec{c}^{\,2} = \left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = 4\vec{a}^{\,2} + 12\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^{\,2}$. З визначення скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, тому:

$$\vec{c}^{\,2} = 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a}\vec{b}\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) + 9|\vec{b}|^2 = 64 + 72 + 81 = 217.$$

Отже, $|\vec{c}| = \sqrt{217}$. ►

3.23. Довжина вектора. Кут між векторами. Умова ортогональності двох векторів

Розглянемо, як знаходиться скалярний добуток векторів, якщо вони задані у координатній формі. Нехай дані два вектори $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Розглянемо спочатку всі можливі скалярні добутки векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ один на одного. Оскільки ці вектора взаємно перпендикулярні, то їхні добутки один на одного дорівнюють нулю, за винятком множення вектора на самого себе. Результати зводимо у таблицю:

•	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

Повернемося тепер до скалярного добутку двох векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \cdot \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= x_1x_2\vec{i}^{\,2} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}^{\,2} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}^{\,2} =$$
$$= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 .$$

Отже, скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Це співвідношення дозволяє обчислити довжину вектора через його координати: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Далі з визначення скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$ знаходимо $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$.

Виражаючи скалярний добуток і довжини векторів через їхні координати, одержимо формулу для знаходження косинуса кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Умова ортогональності двох векторів:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ або } a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0 .$$

Т.ч., для того щоб два вектори були перпендикулярні необхідно і досить, щоб сума добутків відповідних координат цих векторів була дорівнює нулю.

Приклади

Приклад 1. Нехай $A(-1;\ 1;\ 0)$, $B(3;\ 1;\ -2)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Знайти: $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\left|\vec{a}\right|$ і $\left|\vec{b}\right|$; $\cos\varphi$.

◄ $\vec{a} = (3+1; 1-1; -2) = (4; 0; -2)$; $\vec{b} = (2; 0; -3)$

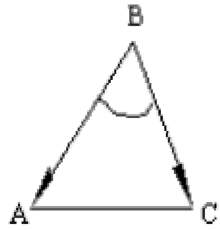
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) = 8 + 6 = 14$.

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{14}{2\sqrt{5 \cdot 13}} = \dfrac{7}{\sqrt{65}}$. ►

Приклад 2. Знайти $\angle B$ у $\triangle ABC$, якщо відомі координати його вершин $A(1;\ 5;\ 6)$, $B(5;\ 3;\ 10)$, $C(2;\ 1;\ 14)$.

◄ $\angle B = \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$



$\overrightarrow{BA} = (1-5; 5-3; 6-10) = (-4; 2; -4)$; $\overrightarrow{BC} = (2-5; 1-3; 14-10) = (-3; -2; 4)$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4)\cdot(-3) + 2\cdot(-2) + (-4)\cdot 4 = 12 - 4 - 16 = -8$.

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-8}{6\sqrt{29}} = -\frac{4}{3\sqrt{29}}.$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{29}}\right) = 104^0. ►$$

Приклад 3. При якому значенні m вектори $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + m\vec{k}$ перпендикулярні?

◄ Умова ортогональності двох векторів $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot m - 15 - m = 0 \quad \Rightarrow \quad m - 15 = 0$

Отже, m = 15. ►

3.24. Індивідуальне завдання № 3.6

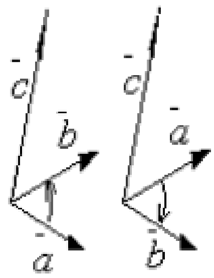
Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

N Вар	**Точка *A***			**Точка *B***			**Точка *C***		
	x	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	1	–2	3	0	–1	2	3	–4	5
2	0	–3	6	–12	–3	–3	–9	–3	–6
3	3	3	–1	5	5	–2	4	1	1
4	–1	2	–3	3	4	–6	1	1	–1
5	–4	–2	0	–1	–2	4	3	–2	1
6	5	3	–1	5	2	0	6	4	–1
7	–3	–7	–5	0	–1	–2	2	3	0
8	2	–4	6	0	–2	4	6	–8	10
9	0	1	–2	3	1	2	4	1	1

10	3	3	–1	1	5	–2	4	1	1
11	2	1	–1	6	–1	–4	4	2	1
12	–1	–2	1	–4	–2	5	–8	–2	2
13	6	2	–3	6	3	–2	7	3	–3
14	0	0	4	–3	–6	1	–5	–10	–1
15	2	–8	–1	4	–6	0	–2	–5	–1
16	3	–6	9	0	–3	–6	9	–12	15
17	0	2	–4	8	2	2	6	2	4
18	3	3	–1	5	1	–2	4	1	1
19	–4	3	0	0	1	3	–2	4	–2
20	1	–1	0	–2	–1	4	8	–1	–1
21	7	0	2	7	1	3	8	–1	2
22	2	3	2	–1	–3	–1	–3	–7	–3
23	2	2	7	0	0	6	–2	5	7
24	–1	2	–3	0	1	–2	–3	4	–5
25	0	3	–6	9	3	6	12	3	3
26	3	3	–1	5	1	–4	4	1	–3
27	–2	1	1	2	3	–2	0	0	3
28	1	4	–1	–2	4	–5	8	4	0
29	0	1	0	0	2	1	1	2	0
30	–4	0	4	–1	6	7	1	10	9
31	–2	4	–6	0	2	–4	–6	8	–10

3.25. Векторний добуток векторів і його властивості

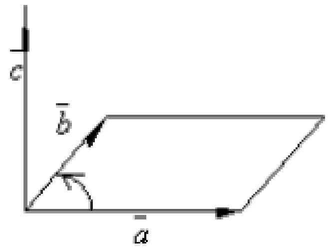


Уведемо спочатку поняття орієнтації трійки векторів.

Нехай дані три не компланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ із загальним початком, перерахованих у визначеному порядку: перший – $\vec{a}$, другий – $\vec{b}$, третій – $\vec{c}$.

Трійка не компланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається *право орієнтованою* або просто *правою*, якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого до другого видний проти годинникової стрілки. У противному випадку трійку векторів називають *лівою*, у цьому випадку якщо ми будемо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ здійснюється по годинній стрілці.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається новий вектор $\vec{c}$, що задовольняє умовам:



1. Довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний площини цього паралелограма.

3. Вектор $\vec{c}$ спрямований так, що вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ утворять праву трійку векторів.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається символом $\vec{a}\times\vec{b}$. Якщо хоча б один зі співмножників дорівнює нулю, то векторний добуток по визначенню вважають рівним нулю.

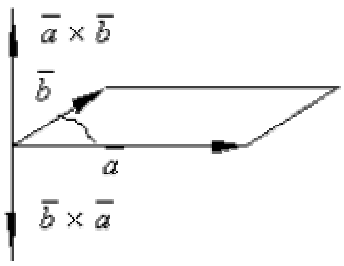
Векторний добуток має наступні **властивості:**

1. З визначення випливає, що величина векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах, і, отже, знаходиться по формулі:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi .$$

Таким чином, площа паралелограма побудованого по векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S_{\text{пар.}} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$. А площа трикутника побудованого по векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S_{\text{тр-ка.}} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

2. При перестановці співмножників векторний добуток змінює свій знак: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.



3. Скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку, тобто для будь–якого числа λ і будь–яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right).$$

4. Для будь–яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має місце рівність:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}.$$

5. Векторний добуток двох векторів дорівнює нульовому векторові тоді і тільки тоді, коли один зі співмножників дорівнює нулю або вектори колінеарні.

Умова колінеарності двох ненульових векторів

Таким чином, для того щоб два ненульових вектори були колінеарні, необхідно і досить, щоб їхній векторний добуток дорівнював нульовому векторові. Зокрема $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Можна показати, що якщо $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ і $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то координати векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходяться по формулі:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Розкрити дужки $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$

◄ $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=2\vec{a}\times\vec{a}-2\vec{a}\times2\vec{b}+3\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{b}\times2\vec{b}$

Оскільки $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ і $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$, то:

$\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=-4\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{b}=-7\vec{a}\times\vec{b}$, або $7\vec{b}\times\vec{a}$.►

<u>Приклад 2.</u> Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$ і $\widehat{\vec{a};\vec{b}}=\dfrac{\pi}{6}$.

◄ $S_{\text{тр-ка.}}=\dfrac{1}{2}\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

Знайдемо $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}=\left(2\vec{a}\right)\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}=\left(2\vec{a}\right)\times\vec{b}$

Оскільки $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, то

$S_{\text{тр-ка.}}=\dfrac{1}{2}\left|\left(2\vec{a}\right)\times\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=1\cdot2\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$. ►

<u>Приклад 3.</u> Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$.

◄ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-13\vec{i}+5\vec{j}-11\vec{k}$.►

<u>Приклад 4.</u> Знайти площу $\triangle ABC$, якщо A(2; 3; 1), B(–1; –2; 0), C(–3; 0; 1).

◄ $S_{\text{тр-ка.}} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$; $\overrightarrow{AB} = (-1-2;-2-3;-1) = (-3;-5;-1)$;

$\overrightarrow{AC} = (-3-2;-3;1-1) = (-5;-3;0)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -5 & -1 \\ -5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Оскільки довжина вектора через його координати обчислюється як: $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, то $S_{\text{тр-ка.}} = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 5^2 + 16^2} = \frac{1}{2}\sqrt{290}$. ►

<u>Приклад 5.</u> Дани вектори $\vec{a} = (n, p, -1)$, $\vec{b} = (4p, -q, 2)$, $\vec{c} = (8, 13, -3)$. Знайти параметри *n, p, q* якщо відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, а вектори $\vec{b}$ й $\vec{c}$ ортогональні.

◄ Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то їхні відповідні координати пропорційні, значить: $\frac{n}{4p} = \frac{p}{-q} = \frac{-1}{2}$. З цього співвідношення можна одержати два рівняння: $\left(\frac{p}{-q} = \frac{-1}{2}\right) \Rightarrow (2p = q)$ і $\left(\frac{n}{4p} = \frac{-1}{2}\right) \Rightarrow (2n = -4p)$

Вектори $\vec{b}$ й $\vec{c}$ ортогональні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто:

$\vec{b}\cdot\vec{c} = 4p\cdot 8 - q\cdot 13 - 2\cdot 3 = 0$ або $32p - 13q - 6 = 0$.

Таким чином, маємо систему рівнянь, вирішуючи яку знаходимо параметри *n, p, q*.

$$\begin{cases} n = -2p \\ 2p = q \\ 32p - 13q - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -2p \\ 32p = 16q \\ 16q - 13q = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -2, \\ p = 1, \\ q = 2. \end{cases}$$ ►

<u>Приклад 6.</u> Знайти площу паралелограма побудованого на векторах $\vec{a} = \mu_1\vec{p} + \eta_1\vec{q}$ і $\vec{b} = \mu_2\vec{p} + \eta_2\vec{q}$, де

$\mu_1 = 6$; $\mu_2 = 1$; $\eta_1 = -1$; $\eta_2 = 2$; $|\vec{p}| = 8$; $|\vec{q}| = 1/2$; $(\widehat{\vec{p}\vec{q}}) = \pi/3$.

◄ Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, чисельно дорівнює модулеві їхнього векторного добутку $S_{\text{парал}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

Обчислюємо векторний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\mu_1\vec{p} + \eta_1\vec{q})\times(\mu_2\vec{p} + \eta_2\vec{q}) = \mu_1\mu_2\vec{p}\times\vec{p} + \mu_1\eta_2\vec{p}\times\vec{q} + \mu_2\eta_1\vec{q}\times\vec{p} + \eta_1\eta_2\vec{q}\times\vec{q}$$

З огляду на алгебраїчні властивості векторного добутку маємо:

$\vec{p}\times\vec{q} = -\vec{q}\times\vec{p}$ (антиперестановочна властивість співмножників) і

$\vec{p}\times\vec{p}=\vec{q}\times\vec{q}=0$

Тому: $a\times b=\mu_1\eta_2 p\times q-\mu_2\eta_1 p\times q=(\mu_1\eta_2-\mu_2\eta_1)p\times q$

Знаходимо площу паралелограма, використовуючи визначення векторного добутку:

$$S_{\text{парал}}=\left|\mu_1\eta_2-\mu_2\eta_1\right|\cdot\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right).$$

Підставляючи данні задачі маємо:

$$S_{\text{парал}}=\left|6\cdot 2-1\cdot(-1)\right|\cdot 8\cdot {}^1\!/_2\cdot\sin{}^{\pi}\!/_3=13\cdot 4\cdot{}^{\sqrt{3}}\!/_2=26\sqrt{3}\ .$$ ►

3.26. Індивідуальне завдання № 3.7

Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Знайти площа паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}=\mu_1\vec{p}+\eta_1\vec{q}$ і $\vec{b}=\mu_2\vec{p}+\eta_2\vec{q}$

N Вар	μ_1	η_1	μ_2	η_2	$\left\|\vec{p}\right\|$	$\left\|\vec{q}\right\|$	$\widehat{\vec{p}\vec{q}}$
1	1	2	3	–1	1	2	30°
2	3	1	1	–2	4	1	45°
3	1	–3	1	2	0,2	1	90°
4	3	–2	1	5	4	0,5	150°
5	1	–2	2	1	2	3	135°
6	1	3	1	–2	2	3	60°
7	2	–1	1	3	3	2	90°
8	4	1	1	–1	7	2	45°
9	1	–4	3	1	1	2	30°
10	1	4	2	–1	7	2	60°
11	3	2	1	–1	10	1	90°
12	4	–1	1	2	5	4	45°
13	2	3	1	–2	6	7	60°
14	3	–1	1	2	3	4	60°
15	2	3	1	–2	2	3	45°
16	2	–3	3	1	4	1	30°
17	5	1	1	–3	1	2	60°
18	7	–2	1	3	0,5	2	90°
19	6	–1	1	1	3	4	45°
20	10	1	3	–2	4	1	30°
21	6	–1	1	2	8	0,5	60°

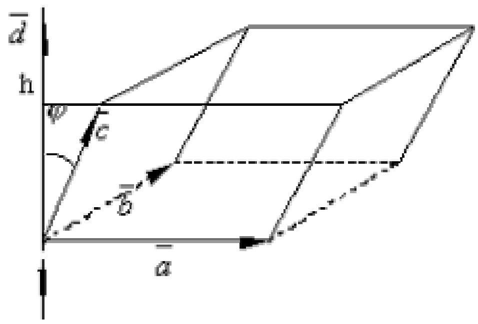
22	3	4	–1	1	2,5	2	90°
23	7	1	1	–3	3	1	135°
24	1	3	3	–1	3	5	120°
25	3	1	1	–3	7	2	45°
26	5	–1	1	1	5	3	150°
27	3	–4	1	3	2	3	45°
28	6	–1	1	5	0,5	4	150°
29	2	3	1	–2	2	1	60°
30	2	–3	5	1	2	3	90°
31	3	2	2	–1	4	3	135°

3.27. Мішаний добуток векторів і його властивості

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число, отримане *векторним* множенням перших двох векторів, з наступним *скалярним* множенням отриманого вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на третій вектор $\vec{c}$. Позначається $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Очевидно, такий добуток є деяке число.

Розглянемо властивості змішаного добутку.

1. *Геометричний зміст* змішаного добутку. Мішаний добуток 3–х векторів з точністю до знака дорівнює обсягові паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на ребрах, тобто $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\pm V_{\text{парал}}$.



Таким чином, об’єм паралелепіпеда $V_{\text{парал}}=\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$,

і об’єм піраміди (тетраедра) $V_{\text{пирам}}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$.

Якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права, то мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)>0$, а якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – ліва, то $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)<0$.

2. Для будь–яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедлива рівність:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

3. При перестановці будь–яких двох співмножників мішаний добуток змінює знак.

Дійсно, якщо розглянемо мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, то, наприклад, $\left(\vec{b}\vec{a}\vec{c}\right)=\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

4. Мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=0$ тоді і тільки тоді, коли один зі співмножників дорівнює нулю або вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні.

5. Якщо вектори задані у координатній формі $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ й $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ і $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, то можна показати, що їхній мішаний добуток знаходиться по формулі:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Т. ч., мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ дорівнює визначникові третього порядку, у якого у першому рядку знаходяться координати першого вектора, у другому рядку – координати другого вектора й у третьому рядку – третього вектора.

Умова компланарності 3–х ненульових векторів

З властивостей змішаного добутку, необхідною і достатньою **умовою компланарності 3–х векторів** є рівність нулю їхнього змішаного добутку. Крім того, звідси випливає, що три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворять базис у просторі, якщо $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\neq 0$.

Приклади

Приклад 1. Знайти об'єм піраміди з вершинами у точках $A(2;\,-2;\,0)$, $B(-1;\,4;\,-4)$, $C(4;\,-8;\,5)$, $D(1;\,-7;\,0)$. Праву або ліву трійку утворять вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$?

◀ $V_{\text{пирам}}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right|$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-6-35=-41.$$

$V_{\text{пирам}}=\dfrac{1}{6}\left|-41\right|=\dfrac{41}{6}=6\dfrac{5}{6}$.

Т. к. $\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)<0$, то трійка векторів ліва. ▶

Приклад 2. З'ясувати компланарні або не компланарні вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, де $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

◄ $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ -3 & 1 & -5\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -3\end{vmatrix}=15\neq 0$, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – не компланарні. ►

3.28. Індивідуальне завдання № 3.8

Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

З'ясувати компланарні або не компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

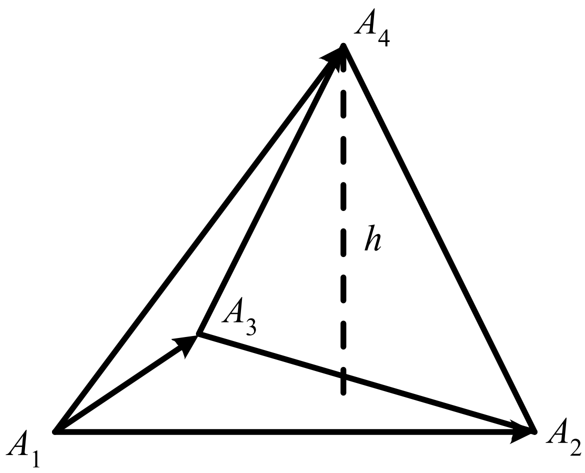
N Вар	Вектор $\vec{a}$			Вектор $\vec{b}$			Вектор $\vec{c}$		
	x	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	2	3	1	–1	0	–1	2	2	2
2	3	2	1	2	3	4	3	1	–1
3	1	5	2	–1	1	–1	1	1	1
4	1	–1	–3	3	2	1	2	3	4
5	3	3	1	1	–2	1	1	1	1
6	3	1	–1	–2	–5	0	5	2	–1
7	4	3	1	1	–2	1	2	2	2
8	4	3	1	6	7	4	2	0	–2
9	3	2	1	1	–3	–7	1	2	3
10	3	7	2	–2	0	–1	2	2	1
11	1	–2	6	1	0	1	2	–6	17
12	6	3	4	–1	–2	–1	2	1	2
13	7	3	4	–1	–2	–1	4	2	4
14	2	3	2	4	7	5	2	0	–1
15	5	3	4	–1	0	–1	4	2	4
16	3	10	5	–2	–2	–3	2	4	3
17	–2	–4	–3	4	3	1	6	7	4
18	3	1	–1	1	0	–1	8	3	–2
19	4	2	2	–3	–3	–3	2	1	2
20	4	1	2	9	2	5	1	1	–1
21	5	3	4	4	3	3	9	5	8
22	3	4	2	1	1	0	8	11	6
23	4	–1	–6	1	–3	–7	2	–1	–4
24	3	1	0	–5	–4	–5	4	2	4
25	3	0	3	8	1	6	1	1	–1
26	1	–1	4	1	0	3	1	–3	8
27	6	3	4	–1	–2	–1	2	1	2
28	4	1	1	–9	–4	–9	6	2	6
29	–3	3	3	–4	7	6	3	0	–1

30	–7	10	–5	0	–2	–1	–2	4	–1
31	7	4	6	2	1	1	19	11	17

3.29. Висота тетраедра (піраміди)

У деяких задачах на застосування змішаного добутку векторів потрібно знайти висоту піраміди (тетраедра) при відомих координатах її вершин. Така задача зустрічається й в аналітичній геометрії, при обчисленні відстані від точки до площини, що проходить через три точки.

Нехай дана піраміда з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4. Потрібно знайти висоту опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.



З вершини A_1 проведемо вектори і знайдемо їхньої координати:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\right),$$
$$\overrightarrow{A_1A_3} = \left(x_3 - x_1;\, y_3 - y_1;\, z_3 - z_1\right),$$
$$\overrightarrow{A_1A_4} = \left(x_4 - x_1;\, y_4 - y_1;\, z_4 - z_1\right)$$

З курсу елементарної геометрії $V_{\mathrm{A_1A_2A_3A_4}} = \dfrac{1}{3} S_{\mathrm{A_1A_2A_3}} \cdot h$, або

$$h = \frac{3V_{\mathrm{A_1A_2A_3A_4}}}{S_{\mathrm{A_1A_2A_3}}}.$$

Обсяг тетраедра знайдемо відповідно до геометричного змісту змішаного добутку: $V_{\mathrm{A_1A_2A_3A_4}} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|$.

Мішаний добуток векторів $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)$ дорівнює визначникові третього порядку, у якого в першому рядку знаходяться координати першого вектора, у другому рядку – координати другого вектора й у третьому рядку – третього вектора.

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

Площа підстави тетраедра (трикутник) знайдемо використовуючи векторний добуток векторів $S_{\mathrm{A_1A_2A_3}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)$.

Координати векторного добутку $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)$знайдемо як:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}.$$

Остаточно, висота тетраедра:

$$h=\frac{3V_{\mathrm{A_1A_2A_3A_4}}}{S_{\mathrm{A_1A_2A_3}}}=\frac{3\cdot\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|}{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|}{\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)}.$$

Приклад

Обчислити обсяг тетраедра з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 і його висоту, опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$, де $A_1(1;5;-7)$, $A_2(-3;6;3)$, $A_3(-2;7;3)$, $A_4(-4;8;-12)$.

◄Знаходимо координати векторів:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(-3-1;\,6-5;\,3+7)=(-4;\,1;\,10),$$
$$\overrightarrow{A_1A_3}=(-2-1;\,7-5;\,3+7)=(-3;\,2;\,10),$$
$$\overrightarrow{A_1A_4}=(-4-1;\,8-5;\,-12+7)=(-5;\,3;\,-5).$$

Знаходимо мішаний добуток векторів $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)=$

$$=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -14 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=105$$

Обсяг тетраедра: $V_{\mathrm{A_1A_2A_3A_4}}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|=\frac{1}{6}\cdot 105=17{,}5$.

Знаходимо векторний добуток векторів $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)=$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-10\vec{i}+10\vec{j}-5\vec{k}$$

Довжина вектора (модуль) через його координати обчислюється як:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-10)^2+10^2+(-5)^2}=\sqrt{225}=15\,.$$

Висота тетраедра:

$$h=\frac{3V_{\mathrm{A_1A_2A_3A_4}}}{S_{\mathrm{A_1A_2A_3}}}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|}{\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)}=\frac{105}{15}=7\,.\blacktriangleright$$

3.30. Індивідуальне завдання № 3.9

Студент повинний вирішити одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Обчислити обсяг тетраедра з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 і його висоту, опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

N	**Точка A_1**			**Точка A_2**			**Точка A_3**			**Точка A_4**		
Вар	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	1	3	6	2	2	1	–1	0	1	–4	6	–3
2	–4	2	6	2	–3	0	–10	5	8	–5	2	–4
3	7	2	4	7	–1	–2	3	3	1	–4	2	1
4	2	1	4	–1	5	–2	–7	–3	2	–6	–3	0
5	–1	–5	2	–6	0	–3	3	6	–3	–10	6	7
6	0	–1	–1	–2	3	5	1	–5	–9	1	–6	3
7	5	2	0	2	5	0	1	2	4	–1	1	1
8	2	–1	–2	1	2	1	5	0	–6	–10	9	–7
9	–2	0	–4	–1	7	1	4	–8	–4	1	–4	6
10	14	4	5	–5	–3	2	–2	–6	–3	–2	2	–1
11	1	2	0	3	0	–3	5	2	6	8	4	–9
12	2	–1	2	1	2	–1	3	2	1	–4	2	5
13	1	1	2	–1	1	3	2	–2	4	–1	0	–2
14	2	3	1	4	1	–2	6	3	7	7	5	–3
15	1	1	–1	2	3	1	3	2	1	5	9	–8
16	1	5	–7	–3	6	3	–2	7	3	–4	8	–12
17	–3	4	–7	1	5	–4	–5	–2	0	2	5	4
18	–1	2	–3	4	–1	0	2	1	–2	3	4	5
19	4	–1	3	–2	1	0	0	–5	1	3	2	–6
20	1	–1	1	–2	0	3	2	1	–1	2	–2	–4
21	1	2	0	1	–1	2	0	1	–1	–3	0	1
22	1	0	2	1	2	–1	2	–2	1	2	1	0
23	1	2	–3	1	0	1	–2	–1	6	0	–5	–4
24	3	10	–1	–2	3	–5	–6	0	–3	1	–1	2
25	–1	2	4	–1	–2	–4	3	0	–1	7	–3	1

26	0	–3	1	–4	1	2	2	–1	5	3	1	–4
27	1	3	0	4	–1	2	3	0	1	–4	3	5
28	–2	–1	–1	0	3	2	3	1	–4	–4	7	3
29	–3	–5	6	2	1	–4	0	–3	–1	–5	2	–8
30	2	–4	–3	5	–6	0	–1	3	–3	–10	–8	7
31	1	–1	2	2	1	2	1	1	4	6	–3	8

Контрольні запитання

1. Які вектора називають колінеарними і які компланарними?
2. Які відомі властивості лінійних операцій над векторами?
3. Які існують властивості проекцій вектора на вісь?
4. Що таке базис на площині й у просторі?
5. Що таке характеристичне рівняння, власні числа і власні вектори матриці лінійного оператора?
6. Що називається канонічним видом квадратичної форми?
7. Які існують методи приведення квадратичної форми до канонічного виду?
8. У чому полягає закон інерції квадратичних форм?
9. Які відомі властивості скалярного добутку? Написати формулу, що виражає скалярний добуток через декартові координати.
10. Які відомі властивості векторного добутку? Написати умову колінеарності векторів мовою векторного добутку. Написати формулу, що виражає векторний добуток через декартові координати співмножників.
11. Дати визначення змішаного добутку. Написати умову компланарності векторів. Написати формулу, що виражає мішаний добуток через декартові координати.

В розділі розглянуті основи векторного аналізу, способи знаходження власних чисел і власних векторів матриці лінійного оператора, а також приведені методи оцінки визначеністі квадратичних форм