2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

2.1. Визначення матриці

Матрицею розміром $m \times n$ називається сукупність $m \cdot n$ чисел, розташованих у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців. Цю таблицю звичайно візьмуть у круглі дужки. Наприклад, матриця може мати вигляд:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1/3 & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1{,}5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для стислості матрицю можна позначати однією заголовною буквою, наприклад, A або B.

У загальному вигляді матрицю розміром $m \times n$ записують так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, що складають матрицю, називаються *елементами матриці*. Елементи матриці зручно постачати двома індексами a_{ij}: перший указує номер рядка, а другий – номер стовпця. Наприклад, a_{23} – елемент розташований у 2–му рядку, 3–му стовпці.

Приклад

Підприємство, що займається торгово–закупівельною діяльністю, спеціалізується на постачаннях мінеральної води. Щотижня підприємство поставляє в магазин №1 – 500 пляшок «Миргородської», 250 пляшок «Дніпропетровської» і 100 пляшок «Боржомі»; у магазин №2 – 100 пляшок «Миргородської», 500 пляшок «Дніпропетровської» і 200 пляшок «Боржомі»; у магазин №3 – 250 пляшок «Миргородської», 250 пляшок «Дніпропетровської» і 500 пляшок «Боржомі». По цим даним скласти матрицю поставок.

◄Опишемо зміст цієї задачі у виді матриці порядку 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 500 & 100 & 250 \\ 250 & 500 & 250 \\ 100 & 200 & 500 \end{pmatrix}.$$

Тут елемент a_{ij} означає, що магазин №j одержує a_{ij} пляшок i–ої мінеральної води в тиждень. Наприклад, a_{32}, означає, що магазин №2 одержав 200 пляшок «Дніпропетровської» мінеральної води за тиждень. ►

2.2. Види матриць

Якщо у матриці число рядків дорівнює числу стовпців, то матриця називається *квадратної*, причому число її рядків або стовпців називається *порядком* матриці. У приведених вище прикладах квадратними є друга матриця – її порядок дорівнює трьом, і третя матриця – її порядок 1.

Матриця, у якій число рядків не дорівнює числу стовпців, називається *прямокутної*. У прикладах це перша матриця і четверта.

Розрізняються також матриці, що мають тільки один рядок або один стовпець.

Матриця, у якої усього один рядок $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, називається *матрицею – рядком* (або рядковою), а матриця, у якої усього один стовпець, *матрицею – стовпцем*.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулеві, називається *нульовою* і позначається (0), або просто 0. Наприклад,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Головною діагоналлю квадратної матриці назвемо діагональ, що йде з лівого верхнього у правий нижній кут.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що лежать нижче головної діагоналі, дорівнюють нулеві, називається *трикутною* матрицею.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, крім, бути може, що розташовані на головній діагоналі, дорівнюють нулеві, називається *діагональною* матрицею. Наприклад, $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею і позначається буквою E. Наприклад, одинична матриця 3–го порядку має вигляд $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Операції над матрицями. Основні властивості операцій

Рівність матриць. Дві матриці A і B називаються рівними, якщо вони мають однакове число рядків і стовпців і їхні відповідні елементи рівні $a_{ij} = b_{ij}$. Так, якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$ тільки тоді, коли $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ і $a_{22} = b_{22}$.

Транспонування. Розглянемо довільну матрицю A, що має m рядків і n стовпців. Їй можна поставити у відповідність таку матрицю B з n рядків і m стовпців, що кожен рядок є стовпцем матриці A з тим же номером (отже, кожен стовпець є рядком матриці A з тим же номером). Отже, якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Цю матрицю B називають *транспонованою* матрицею A, а перехід від A до B *транспонуванням*.

Таким чином, транспонування – це зміна ролями рядків і стовпців матриці. Матрицю, транспоновану до матриці A, звичайно позначають A^{T}.

Зв'язок між матрицею A та її транспонованою можна записати у вигляді: $A_{ij}^{\mathrm{T}} = A_{ji}$.

Операція транспонування матриць має такі властивості:

a) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
b) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$
c) $(A\cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$
d) для симетричної матриці $A^{\mathrm{T}} = A$.

Приклад

Знайти матрицю транспоновану до даної.

◄ $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.►

Додавання матриць. Нехай матриці A і B складаються з однакового числа рядків і однакового числа стовпців, тобто мають однакові розміри. Тоді для того, щоб скласти матриці A і B потрібно до елементів матриці A додати елементи матриці B, що розташовані на тих же самих місцях. Таким чином, сумою двох матриць A і B називається матриця C, що визначається за правилом, наприклад, $A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ {}_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$

або

$$\left(c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right).$$

Приклади

Приклад 1. Знайти суму матриць:

◄$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.►

Приклад 2. Знайти суму матриць:

◄$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ – не можна, тому що розміри матриць різні.►

Приклад 3. Знайти суму матриць:
◄$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.►

Легко перевірити, що **додавання матриць** підкоряється наступним законам: комутативному $A+B=B+A$ і асоціативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Множення матриці на число. Для того щоб помножити матрицю A на число k потрібно кожен елемент матриці A помножити на це число. Таким чином, добуток матриці A на число k є нова матриця, що визначається за правилом $kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} \end{pmatrix}$ або $\left(c_{ij} \right) = \left(k \cdot a_{ij} \right)$.

Для будь–яких чисел a і b та матриць A і B виконуються рівності:

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A), \qquad \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B, \qquad (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти добуток матриці на число:
◄$-2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.►

Приклад 2. Знайти $2A–B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

◄$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.►

Приклад 3. Знайти $C= – 3A+4B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

◄Матрицю C знайти не можна, тому що матриці A і B мають різні розміри.►

Приклад 4. Комбінат хлібопродуктів закуповує у двох фермерських господарств №1 і №2 зерно пшениці 3, 4, 5 класів у відповідності до плану закупівель, що приведено у таблиці. Знайти кількість зерна по кожному класу пшениці, що закуплено комбінатом у фермерських господарств за III квартал.

Місяць	Постачальники	Кількість пшениці, тонн		
		3 клас	4 клас	5 клас
липень	ф/г №1	1000	2000	1000

	ф/г №2	2000	1000	500
серпень	ф/г №1	1500	2000	1000
	ф/г №2	1800	1500	800
вересень	ф/г №1	1500	2000	1000
	ф/г №2	1800	1500	800

◄Складемо матрицю закупівлі пшениці в липні: $A=\begin{pmatrix}1000 & 2000 & 1000\\ 2000 & 1000 & 500\end{pmatrix}$. Кількість закупленої пшениці в серпні й у вересні незмінно, тому матрицю закупівлі в ці місяці можна виразити матрицею $B=\begin{pmatrix}1500 & 2000 & 1000\\ 1800 & 1500 & 800\end{pmatrix}$. Кількість зерна по кожному класу пшениці, що закуплено комбінатом у фермерських господарств за III квартал можна знайти як $A+2B$.

Вирішимо поставлену задачу з використанням електронних таблиць *Calc* офісного пакета *OpenOffice*. Для перебування матриці $2B$ (тобто для множення матриці на число) необхідно виділити за допомогою мишки діапазон, у якому планується одержати результат (на рис. 2.1. «F1:H2»); увести в рядку формул вираз «=2*A4:C5»; завершити обчислення послідовним натисканням із затримкою комбінації Ctrl+Shift+Enter. При цьому вказувати матрицю B можна як у рядку формул, так і виділенням мишкою.

Щоб знайти суму двох матриць $A+2B$ виділимо діапазон «F4:H5», введемо в рядок формул вираз «=A1:C2+F1:H2», завершимо обчислення натисканням Ctrl+Shift+Enter.

Таким чином, комбінат хлібопродуктів у III кварталі закупив:

– пшениця 3 клас у ф/г №1 – 4000 тн., у ф/г №2 – 5600 тн.

– пшениця 4 клас у ф/г №1 – 6000 тн., у ф/г №2 – 4000 тн.

– пшениця 5 клас у ф/г №1 – 3000 тн., у ф/г №2 – 2100 тн.

Щоб підрахувати загальну кількість закупленого в III кварталі зерна скористаємося убудованою функцією *Sum*. Для цього установимо курсор в осередок F7; у рядку формул уведемо знак «=» (це можна зробити, кликнувши мишкою по однойменному знаку); в *Області листа* знайдемо функцію *Sum* і вкажемо осередок, що плануємо складати. У результаті в рядку формул побачимо вираз «=Sum(F4:F5)». Завершимо обчислення натисканням Enter. Щоб одержати аналогічну суму для осередків G4:G5, H4:H5 скористаємося функцією автозаповнення, що полягає в тому, що результат виконання деякої операції з окремими осередками можна переносити на інші осередки. Виділимо осередок F7; курсор мишки установимо в околиці правого нижнього кута виділеного осередку; натискаючи й утримуючи натиснутою ліву кнопку мишки, потягнемо за чорний хрестик вправо доти, поки виділеними не виявляться осередки F8, F9.

Таким чином, загальна кількість зерна, закупленого в III кварталі у фермерських господарств №1,2, склало:

– пшениця 3 класи – 9600 тн.

– пшениця 4 класи – 10000 тн.

– пшениця 5 класу – 5100 тн.►

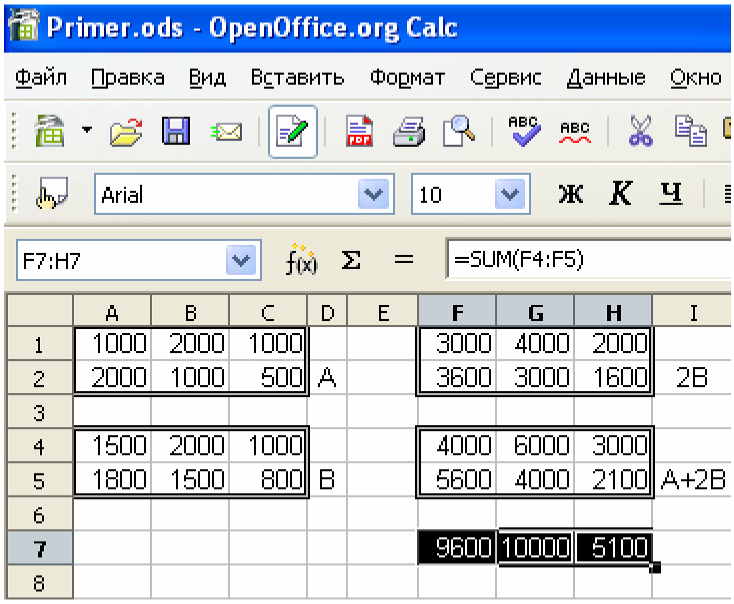
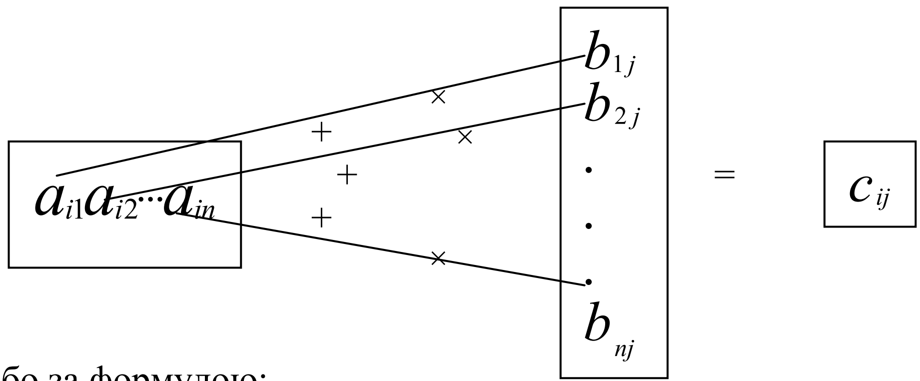


Рис. 2.1. Фрагмент виконання обчислень у *OpenOffice Calc*

Множення матриць. Операція множення матриць здійснюється по своєрідному законі. *Добутком* матриці *A* на матрицю *B* називається нова матриця *C*=*AB*, елементи якого складаються за схемою:



або за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj},\quad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,p}.\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, щоб одержати, наприклад, у матриці–добутку (тобто у матриці *C*) елемент, що розташований у 1–му рядку і 3–му стовпці c_{13}, потрібно у 1–ій матриці взяти 1–ий рядок, у 2–ій – 3–ій стовпець, і потім елементи рядка помножити на відповідні елементи стовпця й отримані добутки скласти. Інші елементи матриці–добутку виходять за допомогою аналогічного добутку рядків першої матриці на стовпці другої матриці.

Помітимо, що розміри матриць–співмножників повинні бути погоджені. Перемножувати можна тільки ті матриці, у яких **число стовпців першої матриці збігається з числом рядків другої матриці** (тобто довжина рядка першої дорівнює висоті стовпця другий).

У загальному випадку, якщо ми множимо матрицю $A = (a_{ij})$ розміру $m\times n$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $n\times p$, то одержимо матрицю C розміру $m\times p$, елементи якої обчислюються у такий спосіб: елемент c_{ij} виходить у результаті добутку елементів i–го рядка матриці A на відповідні елементи j–го стовпця матриці B і їхнього додавання.

З цього правила випливає, що завжди можна перемножувати дві квадратні матриці одного порядку, у результаті одержимо квадратну матрицю того ж порядку. Зокрема, квадратну матрицю завжди можна помножити саму на себе, тобто звести у квадрат. Операція множення матриць природним образом поширюється на **випадок декількох множників**. На підставі цього маємо:

$$A^n = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n}$$

Іншим важливим випадком є множення матриці–рядка на матрицю–стовпець, причому ширина першої повинна бути дорівнює висоті другий, у результаті одержимо матрицю першого порядку (тобто один елемент). Дійсно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти елементи c_{12}, c_{23} і c_{21} матриці C, якщо:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C = AB.$$

◄ $c_{12} = 0-2+3=1,\ \ c_{23}=0+0+1=1,\ \ c_{21}=0-3+1=-2.$►

Приклад 2. Знайти добуток матриць:

◄ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$►

Приклад 3. Знайти добуток матриць:

◄ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-2+2 & -3-2-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix}.$►

Приклад 4. Знайти добуток матриць:

◄ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ – не можливо знайти рішення, тому що ширина першої матриці дорівнює двом елементам, а висота другий – одному.►

Приклад 5. Знайти AB і BA, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$:

◄ $AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}$.►

Приклад 6. Знайти AB і BA, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

◄ $AB=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ – не має змісту.►

Таким чином, ці прості приклади показують, що матриці, узагалі говорячи, не переставні одна з одною, тобто $A\cdot B \neq B\cdot A$. Тому при множенні матриць потрібно ретельно стежити за порядком множників. Коли $A\cdot B = B\cdot A$, матриці A и B називаються переставними або такими що комутують між собою.

Можна перевірити, що множення матриць підкоряється асоціативному і дистрибутивному законам, тобто $(AB)C=A(BC)$ і $(A+B)C=AC+BC$.

Легко також перевірити, що при множенні квадратної матриці A на одиничну матрицю E того ж порядку знову одержимо матрицю A, причому $AE=EA=A$.

Можна відзначити наступний цікавий факт. Як відомо, добуток 2–ох відмінних від нуля чисел не дорівнює 0. Для матриць це може не мати місця, тобто добуток 2–ох не нульових матриць може виявитися рівним нульовій матриці.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, то $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Приклади

Приклад 1 Підприємство військово–промислового комплексу випускає продукцію чотирьох видів, при цьому використовуючи на одиницю продукції ресурси трьох типів, як показано в таблиці. Визначити річні потреби підприємства в ресурсах, при відомому випуску продукції.

Ресурс	Прод.1	Прод.2	Прод.3	Прод.4
Трудові, чол./година	10	10	12	14
Сировина, тн.	78	56	44	14
Фінанси, тис. грн.	42	80	10	53
Кількість продукції, виготовленої за рік, шт.				
	25	16	45	18

◄Складемо матрицю використання ресурсів на виготовлення одиниці продукції № 1, 2, 3, 4: $A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 12 & 14 \\ 78 & 56 & 44 & 14 \\ 42 & 80 & 10 & 53 \end{pmatrix}$.

Матриця випуску продукції буде: $B = \begin{pmatrix} 25 \\ 16 \\ 45 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Річну потребу підприємства в ресурсах для виготовлення відомої кількості чотирьох видів продукції знайдемо як добуток матриць AB.

Вирішимо поставлену задачу з використанням електронних таблиць *Calc* офісного пакета *OpenOffice.* Для обчислення добутку двох матриць AB потрібно попередньо визначити розмірність шуканої матриці. Оскільки в результаті добутку двох матриць виходить матриця, число рядків якої дорівнює числу рядків першої матриці, а число стовпців дорівнює числу стовпців другої матриці, то в даному випадку результатом буде матриця розмірністю 3x1. Виділяємо діапазон осередків зазначеної розмірності «D5:D7» і натискаємо на значок f_x. У результаті відкриється вікно «Майстер функцій», у якому необхідно знайти категорію «Масив», вибрати серед інших функцію «MMULT» і натиснути «Далі». У вікні, що з'явиться вказати мишкою в першому рядку – діапазон осередків першої матриці A (A1:D3), у другому рядку – діапазон осередків другої матриці B (A5:A8), і завершити введення натисканням «ОК».

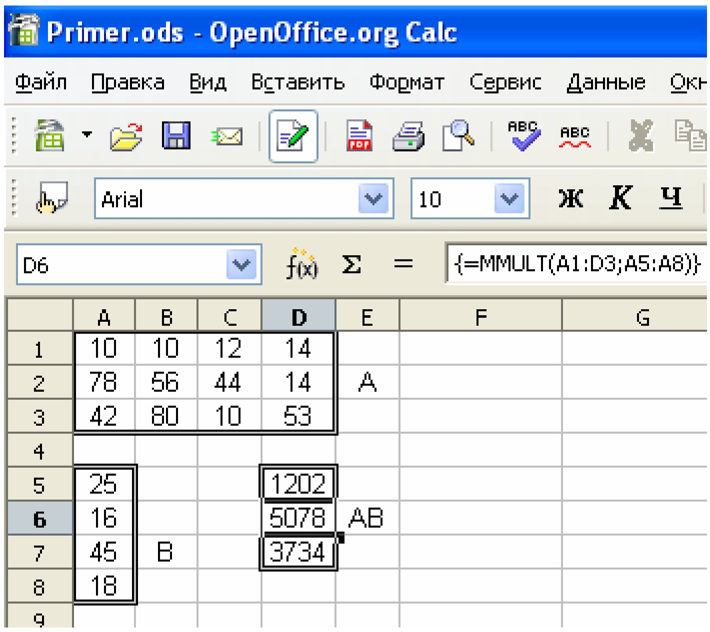


Рис. 2.2. Фрагмент виконання обчислень у OpenOffice Calc

Таким чином, річні потреби в ресурсах: трудові – 1202 чол./годин, сировинні – 5078 тн., фінансові – 3734 тис. грн.►

<u>Приклад 2</u> Комбікормовий завод робить комбікорм по трьох рецептах – №1 – для птаха, №2 – для риби і №3 – для свиней. При цьому, як сировина ви-

користовується фуражний ячмінь, фуражна пшениця, пшеничні висівки і зернові відходи. Рецептура по виготовленню 1 тн. кожного виду комбікорму, а також план виробництва й вартість 1 тн. кожного виду сировини приведені в таблиці. Знайти потреби в сировині для планового випуску комбікормів і загальну вартість сировини.

Комбікорму	Норма витрати сировини на 1 тн. продукції, тн				План вида, тн.
	ф. ячмінь	ф. пшениця	п. висівки	з. відходи	
рецепт №1	0,3	0,1	0,4	0,2	5400
рецепт №2	0,2	0,2	0,5	0,1	1200
рецепт №3	0,1	0,3	0,3	0,3	9800
Вартість сировини, грн./тн.					
	420	430	100	50	

◄Норми витрати сировини характеризуються матрицею: $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$.

План випуску комбікормів задано матрицею $B=\begin{pmatrix} 5400 \\ 1200 \\ 9800 \end{pmatrix}$.

Вартість кожного виду сировини задано матрицею $C=\begin{pmatrix} 420 & 430 & 100 & 50 \end{pmatrix}$.

Для одержання витрати сировини по видах необхідно стовпці матриці A перемножити зі стовпцем B. Це суперечить правилу множення двох матриць. Отже, необхідно попередньо транспонувати матрицю A, а потім знайти добуток $A^{\mathrm{T}}B$.

Вирішимо поставлену задачу з використанням електронних таблиць *Calc* офісного пакета *OpenOffice.* Для перебування матриці A^{T} (тобто для транспонування матриці) необхідно виділити діапазон осередків розмірності 4x3 «G1:I4» і натиснути на значок . У вікні «Майстер функцій» необхідно знайти категорію «Масив», вибрати серед інших функцію «TRANSPOSE» і натиснути «Далі». У вікні, що з'явиться, указати мишкою в рядку – діапазон осередків матриці A (A1:D3) і завершити введення натисканням «OK».

Для обчислення добутку двох матриць $A^{\mathrm{T}}B$ потрібно попередньо визначити розмірність шуканої матриці. Оскільки в результаті добутку двох матриць виходить матриця, число рядків якої дорівнює числу рядків першої матриці, а число стовпців дорівнює числу стовпців другої матриці, то в даному випадку результатом буде матриця розмірністю 4x1. Виділяємо діапазон осередків зазначеної розмірності «G6:G9» і натискаємо на значок . У вікні «Майстер функцій» необхідно знайти категорію «Масив», вибрати серед інших функцію «MMULT» і натиснути «Далі». У вікні, що з'явиться вказати мишкою в першому рядку – діапазон осередків першої матриці A^{T} (G1:I4), у другому рядку – діапазон осередків другої матриці *B* (A5:A7), і завершити введення натисканням «ОК».

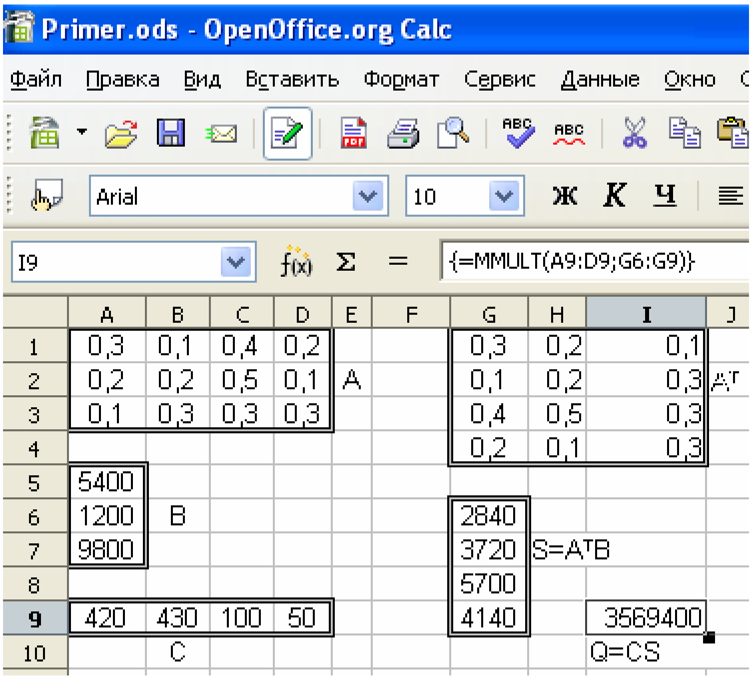


Рис. 2.3. Фрагмент виконання обчислень у *OpenOffice Calc*

Отже, потреби у сировині – 2840 тн. фуражного ячменя, 3720 тн. фуражної пшениці, 5700 тн. пшеничних висівок і 4140 тн. зернових відходів.

Загальну вартість сировини знайдемо як добуток матриць *C* і *S*. Розмірність матриці *C* 1х4, а матриці *S* – 4х1, тобто розмірність матриці *Q*=*CS* – 1х1. За допомогою убудованої функції «MMULT» знаходимо добуток зазначених матриць.

Таким чином, загальна вартість сировини складає 3569,4 тис. грн. ►

2.4. Індивідуальне завдання № 2.1

Студент має розв’язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Виконати дії над матрицями

Вар	Завдання
1.	**2(A+B)(2B–A), де** $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$
2.	**3A–(A+B)B, де** $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{bmatrix}$

3.	**2(A–B)(A^2+B), де** $A=\begin{bmatrix}5&1&7\\-10&-2&1\\0&1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&4&1\\3&1&0\\7&2&1\end{bmatrix}$
4.	**(A^2–B^2)(A+B), де** $A=\begin{bmatrix}7&2&0\\-7&-2&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&2&3\\1&0&-2\\3&1&1\end{bmatrix}$
5.	**(A–B^2)(2A+B), де** $A=\begin{bmatrix}5&2&0\\10&4&1\\7&3&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&6&-1\\-1&-2&0\\2&1&3\end{bmatrix}$
6.	**(A–B)A+2B, де** $A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\0&2&-1\\-2&-1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&7&-2\\1&1&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$
7.	**2(A–0,5B)+AB, де** $A=\begin{bmatrix}5&3&-1\\2&0&4\\3&5&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&4&16\\-4&-2&0\\6&8&2\end{bmatrix}$
8.	**(A–B)A+3B, де** $A=\begin{bmatrix}3&2&-5\\4&2&0\\1&1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&2&4\\0&3&2\\-1&-3&4\end{bmatrix}$
9.	**2A–(A^2+B)B, де** $A=\begin{bmatrix}1&4&2\\2&1&-2\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&6&-2\\4&10&1\\2&4&-5\end{bmatrix}$
10.	**3(A^2–B^2)–2AB^T, де** $A=\begin{bmatrix}4&2&1\\3&-2&0\\0&-1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&0&2\\5&-7&-2\\1&0&-1\end{bmatrix}$
11.	**(2A–B)(3A+B)–2AB, де** $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\-2&0&1\\-1&3&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}7&5&2\\0&1&2\\-3&-1&-1\end{bmatrix}$
12.	**A(A–B^2)–2(B^T+A)B, де** $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\-1&2&4\\5&3&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&7&13\\-1&0&5\\5&13&21\end{bmatrix}$
13.	**(A+B)A–B(2A+3B), де** $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&3&5\\1&4&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&11&3\\1&6&1\\2&2&16\end{bmatrix}$
14.	**A(2A–B)–B(A–B), де** $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\4&-1&0\\0&1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}9&8&7\\2&7&3\\4&3&5\end{bmatrix}$
15.	**3(A+B)(AB^T–2A), де** $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&-2&0\\4&-3&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\-3&0&1\\2&1&2\end{bmatrix}$
16.	**2AB–(A+B)(A–B), де** $A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\1&1&2\\3&-2&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&-2&4\\1&2&3\\3&4&-5\end{bmatrix}$

17.	**2A+3B(AB–2A), де** $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{bmatrix}$
18.	**(A–B)(A+B)–2A^{T}B, де** $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$
19.	**2A–AB(B–A)+B, де** $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 7 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 4\end{bmatrix}$
20.	**A^2–(A+B)(A–3B),** $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$
21.	**B(A+2B)–3AB, де** $A=\begin{bmatrix}7 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$
22.	**3(A+B)–(A–B)A, де** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$
23.	**A(A–B)+2B(A+B), де** $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$
24.	**(2A+B)B–3B, де** $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$
25.	**AB–2(A^T+B)A, де** $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$
26.	**(A+2B)(3A–B), де** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$
27.	**2A^{T}B–A(B^T–A) , де** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$
28.	**3(A+B)(2B–A), де** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$
29.	**2A(A+B)–3AB, де** $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
30.	**3AB+(A–B)(A+2B), де** $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

31.	**2(A–B)+(A+B)A , де** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ 0 & 5 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

2.5. Поняття визначника. Методи обчислення визначників

Визначник матриці називають ще **<u>детермінантом</u>**. Для його запису використовують наступні позначення:

$|A|$, det A , det (a_{ij}), Δ.

<u>Визначником</u> квадратної матриці другого порядку $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ називається число, що дорівнює $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ й описується символом $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$. Тобто $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Отже, для того щоб знайти визначник другого порядку потрібно з добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів по другій діагоналі.

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Обчислити визначники другого порядку:

◄ $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23$; $\begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0+6=6$.►

<u>Приклад 2.</u> Обчислити визначник матриці *D*, якщо *D*=–*A*+2*B* и $A=\begin{pmatrix}11 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$:

◄ $D=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & -2\\ 14 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 17 & 0\end{pmatrix}$.►

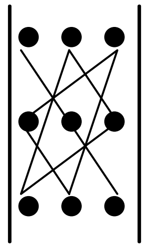
<u>Визначником</u> квадратної матриці третього порядку

$A=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{bmatrix}$ називають число: $\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}=$

$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$.

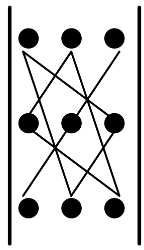
Для визначника **третього порядку** існують більш наочні правила обчислення визначника, наприклад, правило Сарруса (трикутників) і правило дописування стовпців (рядків). Перші множники – елементи верхнього рядка. Щоб запам'ятати, які добутки варто брати зі знаком "плюс", а які зі знаком "мінус", має сенс скористатися правилом Сарруса, що схематично зображено нижче:

Добуток елементів матриці, що беруться зі знаком "плюс"



$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}.$$

Добуток елементів матриці, що беруться зі знаком “мінус”



$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}.$$

Той же результат можна одержати дописуванням додаткових стовпців (рядків):

$$\begin{array}{ccccc} + & & & & - \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

<u>**Приклад**</u>

Обчислити визначник третього порядку:

$$◄\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(2\cdot(-2)\cdot 3+3\cdot 1\cdot 1+4\cdot 5\cdot 2)-$$
$$-(4\cdot(-2)\cdot 1+3\cdot 5\cdot 3+2\cdot 1\cdot 2)=(-12+3+40)-(-8+45+4)=31-41=-10\ ►$$

Отже, на відміну від матриць, які являють собою таблицю чисел, визначник це число, що певним чином ставиться у відповідність матриці.

2.6. Властивості визначників

1. Якщо квадратна матриця A^{T} є транспонованою до матриці A, то їхні визначники збігаються $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$, тобто визначник не міняється, якщо замінити його рядки стовпцями і навпаки, наприклад, для визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановці 2–х рядків або стовпців визначник змінить знак на протилежний, зберігаючи абсолютну величину, тобто, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо матриця має два однакові рядки або стовпця, то визначник дорівнює нулеві. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

Дійсно, якщо переставити тут 2–ий і 3–ій рядки, то по властивості 2 цей визначник повинний змінити знак, але сам визначник у даному випадку не міняється, тобто одержуємо $|A| = -|A|$ або $|A| = 0$.

4. Загальний множник рядка або стовпця можна виносити за знак визначника (на відміну від матриць, де множення матриці на число k рівносильне множенню всіх елементів матриці на це число). Наприклад,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Якщо всі елементи якого–небудь рядка або стовпця матриці дорівнюють нулеві, то сам визначник дорівнює нулеві.

6. Якщо всі елементи якого–небудь рядка або стовпця матриці представлені у вигляді суми 2–х доданків, то визначник можна представити у вигляді суми 2–х визначників за формулою, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a'_{32} + a''_{32} & a'_{33} + a''_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Якщо до якого–небудь рядка (або стовпця) матриці додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне і теж число, то визначник не змінить своєї величини. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ці властивості визначників досить часто використовуються при обчисленні визначників і у різних задачах.

2.7. Мінори й алгебраїчні доповнення. Розкладання визначників по елементах рядків і стовпців

Нехай маємо визначник третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Мінором, що відповідає даному елементові a_{ij} визначника третього порядку, називається визначник другого порядку, отриманий з даного викреслюванням рядка і стовпця, на перетинанні яких розташований даний елемент, тобто *і–го* рядка і *j–го* стовпця. Мінори відповідні даному елементові a_{ij} будемо позначати M_{ij}.

Наприклад, мінором M_{12}, що відповідає елементові a_{12}, буде визначник: $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, що виходить викреслюванням з даного визначника 1–ої рядка і 2–го стовпця.

Якщо формулу для обчислення визначника третього порядку

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$

перетворити як

$a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right)$,

то одержимо визначник, що дорівнює сумі добутків елементів 1–го рядка на відповідні їм мінори; при цьому мінор, що відповідає елементові a_{12}, береться зі знаком «–», тобто можна записати, що:

$$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \tag{2.1}$$

Для визначника третього порядку маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, ця формула дає розкладання визначника третього порядку по елементах першого рядка a_{11}, a_{12}, a_{13} і зводить обчислення визначника третього порядку до обчислення визначників другого порядку.

Аналогічно можна ввести поняття мінорів для визначників четвертого, п'ятого і т.д. порядків.

Приклади

Приклад 1. Обчислити визначник третього порядку:

$$◄ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = 3. ►$$

Приклад 2. Обчислити визначник третього порядку:

$$◄ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\cdot 4 = 9. ►$$

Приклад 3. Вирішите рівняння $\begin{vmatrix} x+3 & 2+x & 4 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 4 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$.

◄ $(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ x & 4 \end{vmatrix} - (2+x)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 0$.

$$(x+3)(4x-4-3x)+4(3x-4x+4)=0.$$
$$(x+3)(x-4)+4(-x+4)=0.$$
$$(x-4)(x-1)=0.$$
$$x_1 = 4,\ x_2 = 1. ►$$

Уведемо ще одне поняття.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається його мінор M_{ij}, помножений на вираз $(-1)^{i+j}$.

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} позначається A_{ij}.

З визначення одержуємо, що зв'язок між алгебраїчним доповненням елемента і його мінором виражається рівністю $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, тобто алгебраїчне доповнення – це мінор з відповідним знаком.

Для визначення знака алгебраїчного доповнення можна скористатися нижченаведеною таблицею чергування знаків:

$$\begin{Vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

Наприклад, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$; $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$.

Приклад

Дано визначник $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Знайти алгебраїчні доповнення A_{13}, A_{21}, A_{32}.

◄ $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2-12 = -14$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$;

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$. ►

Легко бачити, що використовуючи алгебраїчні доповнення елементів, формулу (2.1) можна записати у вигляді:

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогічно цій формулі можна одержати розкладання визначника по елементах будь–якого рядка або стовпця.

Наприклад, розкладання визначника по елементах 2–го рядка можна одержати у такий спосіб. Відповідно до властивості 2 визначники, при зміні другого і першого рядка визначника місцями, маємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо отриманий визначник по елементах 1–го рядка.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (2.2)$$

Звідси $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-a_{21}M_{21}+a_{22}M_{22}-a_{23}M_{23}$,

тому що визначники другого порядку у формулі (2.2) є мінори елементів a_{21}, a_{22}, a_{23}.

Таким чином, $\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$, тобто ми одержали розкладання визначника по елементах 2–го рядка.

Аналогічно можна одержати розкладання визначника по елементах третього рядка. Використовуючи властивість 1 визначників (про транспонування), можна показати, що аналогічні розкладання справедливі і при розкладанні по елементах стовпців.

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема (про розкладання визначника по заданому рядку або стовпцеві). Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого–небудь його рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Усе вищесказане справедливо і для визначників більш високого порядку.

Приклади

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, розкладаючи його по елементах 2–го стовпця.

◄ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}+0+(-1)^{3+2}\cdot 4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-(-1+9)-4(6-2)=-24$. ►

Приклад 2. Обчислити визначник, використовуючи його властивості.

◄Перш ніж розкладати визначник по елементах якого–небудь рядка, зводячи до визначників третього порядку, перетворимо його, використовуючи властивість 7, зробивши у якому–небудь рядку або стовпці всі елементи, крім одного, рівними нулеві. У даному випадку зручно скласти 2–ий і третій рядки, а потім застосувати розкладання по 4–му стовпцю:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Тепер складемо другий і третій стовпець, а потім застосуємо розкладання по 3–му рядку:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -(-8+8) = 0 . \blacktriangleright$$

2.8. Індивідуальне завдання № 2.2

Студент має розв'язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Порахувати визначник 4х4 розкладанням по будь–якому рядку, розкладанням по будь–якому стовпцеві і використовуючи властивості визначників.

Вар	Завдання	Вар	Завдання
1.	$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$	2.	$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 6 \\ 6 & 10 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
3.	$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	4.	$\Delta = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
5.	$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1.5 \end{bmatrix}$	6.	$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
7.	$\Delta = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	8.	$\Delta = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$
9.	$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -10 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	10.	$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

11.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&-1&1&2\\1&2&-1&1\\3&0&-1&-3\\1&-1&1&3\end{bmatrix}$	12.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&1&2&0\\-1&-3&3&-1\\1&3&-8&1\\1&-1&2&-1\end{bmatrix}$
13.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&3&0&1\\-1&1&3&0\\0&2&-1&1\\3&-1&1&-2\end{bmatrix}$	14.	$\Delta=\begin{bmatrix}-1&3&3&2\\-2&2&2&1\\0&1&2&0\\-1&3&3&3\end{bmatrix}$
15.	$\Delta=\begin{bmatrix}1&0&3&4\\0&1&5&1\\-3&4&10&1\\0&-6&0&-1\end{bmatrix}$	16.	$\Delta=\begin{bmatrix}3&1&3&2\\-2&2&2&1\\0&1&2&0\\-1&3&3&3\end{bmatrix}$
17.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\2&3&2&0\\0&1&2&0\\1&0&-2&1\end{bmatrix}$	18.	$\Delta=\begin{bmatrix}-2&-2&-1&3\\2&1&0&-1\\3&2&1&-3\\4&3&2&-4\end{bmatrix}$
19.	$\Delta=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\3&-1&-1&-2\\2&3&-1&-1\\1&2&3&-1\end{bmatrix}$	20.	$\Delta=\begin{bmatrix}1&4&1&3\\0&-1&3&-1\\3&1&0&2\\1&-2&5&1\end{bmatrix}$
21.	$\Delta=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&3\\3&2&1&2\\4&3&2&1\end{bmatrix}$	22.	$\Delta=\begin{bmatrix}1&1&-3&0\\2&5&1&2\\0&6&4&1\\6&-1&-1&5\end{bmatrix}$
23.	$\Delta=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&-1&1&2\\2&1&-2&-6\\1&-1&1&3\end{bmatrix}$	24.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&5&-3&2\\0&-4&5&-2\\1&3&-8&1\\1&-1&2&-1\end{bmatrix}$
25.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&1&-3&0\\1&5&1&2\\3&6&4&1\\0&-1&-1&5\end{bmatrix}$	26.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\3&3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{bmatrix}$
27.	$\Delta=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&-3\\3&2&1&-2\\4&3&2&1\end{bmatrix}$	28.	$\Delta=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}$

29.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&1&1&-1\\3&-1&0&-3\\3&0&-1&1\\2&2&-2&5\end{bmatrix}$	30.	$\Delta=\begin{bmatrix}2&1&-3&4\\1&0&-2&3\\3&2&0&-5\\4&3&-5&0\end{bmatrix}$
31.	$\Delta=\begin{bmatrix}3&0&-1&1\\2&1&1&-1\\2&-1&0&-3\\2&2&-2&5\end{bmatrix}$		

2.9. Зворотна матриця

Поняття зворотної матриці вводиться тільки для квадратних матриць.

Якщо A – квадратна матриця, то *зворотною* для неї матрицею називається матриця, що позначається A^{-1} і задовольняє умові $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Справедлива наступна теорема:

Теорема. Для того щоб квадратна матриця A мала зворотну, необхідно і досить, щоб її визначник був відмінний від нуля.

Якщо умови теореми виконані, то матриця зворотна до матриці $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ знаходиться у такий спосіб: $A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}$,

де $\tilde{A}$ – союзна матриця.

Союзна матриця $\tilde{A}$ знаходиться як:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}.$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} первинної матриці A.

Для знаходження союзної матриці простіше спочатку транспонувати первинну матрицю A, а потім скласти матрицю з алгебраїчних доповнень вже транспонованої матриці A^{T}.

Отже, щоб знайти зворотну матрицю потрібно:

1. Знайти визначник матриці A;
2. Знайти матрицю транспоновану до первинної;
3. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів транспонованої матриці (одержати союзну матрицю $\tilde{A}$);
4. Знайти зворотну матрицю за формулою: $A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}$.

Аналогічно для матриць другого порядку, зворотною буде наступна матриця $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}$.

Зворотна матриця має такі властивості:

1) визначник зворотної матриці A^{-1} дорівнює величині зворотної до визначника заданої матриці A, тобто:

$$\det^{-1}=1/\det;$$

2) зворотна матриця добутку матриць дорівнює добуткові зворотних матриць, узятих у зворотному порядку:

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1};$$

3) матриця транспонована зворотної дорівнює зворотній від транспонованої до даної матриці, тобто:

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

<u>**Приклади**</u>

<u>Приклад 1.</u> Знайти матрицю, зворотну до даної $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

◀Знайдемо визначник первинної матриці: $|A|=2$.

Знайдемо матрицю транспоновану до первинної:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці A^{T}:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо зворотну матрицю:

$$A^{-1}=\frac{\tilde{A}}{|A|}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Перевірка: $A^{-1}\cdot A=E$

$\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$.▶

<u>Приклад 2.</u> Знайти матрицю, зворотну до даної $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

◀Знайдемо визначник первинної матриці:

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3-12=-9$

Знайдемо матрицю транспоновану до первинної:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці A^{T}:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}3&0\\1&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}.$$

Знайдемо зворотну матрицю: $A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}=-\dfrac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}$.►

2.10. Індивідуальне завдання № 2.3

Студент має розв'язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Знайти зворотні матриці

Вар	Завдання
1.	$(\mathbf{A\cdot B})^{-1}$, **де** $A=\begin{bmatrix}2&3&-1\\4&5&2\\-1&0&7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&0&5\\0&1&3\\2&-2&4\end{bmatrix}$
2.	$(\mathbf{A^{T}\cdot B})^{-1}$, **де** $A=\begin{bmatrix}4&5&-2\\3&-1&0\\4&2&7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&1&3\\5&7&3\end{bmatrix}$
3.	$(\mathbf{A^{T}\cdot B^{T}})^{-1}$, **де** $A=\begin{bmatrix}5&1&7\\-10&-2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&4&1\\3&1&0\\7&2&1\end{bmatrix}$
4.	$(\mathbf{A\cdot B^{T}})^{-1}$, **де** $A=\begin{bmatrix}7&2&0\\-7&-2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&2&3\\1&0&-2\\3&1&1\end{bmatrix}$
5.	$(\mathbf{B\cdot A^{T}})^{-1}$, **де** $A=\begin{bmatrix}5&2&0\\10&4&1\\7&3&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&6&-1\\-1&-2&0\\2&1&3\end{bmatrix}$
6.	$(\mathbf{B\cdot A^{T}})^{-1}$, **де** $A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\0&2&-1\\-2&-1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&7&-2\\1&1&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$
7.	$(\mathbf{B^{T}\cdot A^{T}})^{-1}$, **де** $A=\begin{bmatrix}5&3&-1\\2&0&4\\3&5&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&4&16\\-4&-2&0\\6&8&2\end{bmatrix}$
8.	$(\mathbf{A\cdot B})^{-1}$, **де** $A=\begin{bmatrix}3&2&-5\\4&2&0\\1&1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&2&4\\0&3&2\\-1&-3&4\end{bmatrix}$

9.	**$(A^T \cdot B)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}1&4&2\\2&1&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&6&-2\\4&10&1\\2&4&-5\end{bmatrix}$
10.	**$(A \cdot B^T)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}4&2&1\\3&-2&0\\0&-1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&0&2\\5&-7&-2\\1&0&-1\end{bmatrix}$
11.	**$(B \cdot A)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\-2&0&1\\-1&3&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7&5&2\\0&1&2\\-3&-1&-1\end{bmatrix}$
12.	**$(B^T \cdot A)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\-1&2&4\\5&3&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&7&13\\-1&0&5\\5&13&21\end{bmatrix}$
13.	**$(B \cdot A^T)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&3&5\\1&4&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&11&3\\1&6&1\\2&2&16\end{bmatrix}$
14.	**$(B^T \cdot A^T)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\4&-1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9&8&7\\2&7&3\\4&3&5\end{bmatrix}$
15.	**$(A \cdot B)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&-2&0\\4&-3&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\-3&0&1\\2&1&2\end{bmatrix}$
16.	**$(A^T \cdot B)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\1&1&2\\3&-2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&-2&4\\1&2&3\\3&4&-5\end{bmatrix}$
17.	**$(A \cdot B^T)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&0&-1\\7&3&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&3&1\\-1&2&0\\-3&0&0\end{bmatrix}$
18.	**$(A^T \cdot B^T)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}3&2&-4\\-1&0&2\\-2&1&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1&-2\\-1&1&2\\3&-1&0\end{bmatrix}$
19.	**$(A \cdot B)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}3&2&-1\\0&-1&2\\5&7&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&3&-1\\2&-1&2\\-3&1&4\end{bmatrix}$
20.	**$(A^T \cdot B)^{-1}$,** $A=\begin{bmatrix}4&5&6\\-1&0&3\\-1&2&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-2\\3&1&2\end{bmatrix}$
21.	**$(A \cdot B^T)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}7&-3&0\\1&-1&0\\2&0&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4&2&1\\1&0&1\\3&2&1\end{bmatrix}$
22.	**$(A^T \cdot B^T)^{-1}$, де** $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&3\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&2&1\\-1&2&0\\2&3&-1\end{bmatrix}$

23.	**(В·А)** $^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\1&1&-2\\1&-1&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&3&5\\4&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}$
24.	$(\mathbf{У}\cdot\mathbf{А}^{\mathrm{т}})^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&0&-2\\2&-1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&0&2\\2&1&1\\-2&0&1\end{bmatrix}$
25.	$(\mathbf{В}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{А})^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&0&1\\3&1&-2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&2&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$
26.	$(\mathbf{В}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{А}^{\mathrm{т}})^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&3&-1\\-2&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$
27.	**(А·В)** $^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&3&0\\0&2&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&-1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$
28.	$(\mathbf{А}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{В})^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\1&2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&3&1\\3&1&0\end{bmatrix}$
29.	$(\mathbf{А}\cdot\mathbf{В}^{\mathrm{т}})^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&-2&0\\0&1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&0&-2\\1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$
30.	$(\mathbf{А}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{В}^{\mathrm{т}})^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}2&5&-1\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$
31.	**(В·А)** $^{-1}$**, де** $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&0&5\\1&2&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-2&4\\0&5&-3\\1&1&-1\end{bmatrix}$

2.11. Поняття і знаходження рангу матриці

У цьому розділі розглянемо ще одну важливу числову характеристику матриці, зв'язану з тим, наскільки її рядки (стовпці) залежать друг від друга.

Нехай дана матриця A розміром $m\times n$ і число k, не переважаюче найменшого з чисел m і n: $k\le(m,n)$. Виберемо довільно k рядків і k стовпців матриці A (номера рядків можуть відрізнятися від номерів стовпців). Визначник матриці, складеної з елементів, що розташовані на перетинанні *однакової кількості* k рядків і k стовпців, називається мінором порядку k матриці A.

Приклад

Знайти мінори всіх порядків матриці $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\3&4&-5&6\\5&-2&-3&-4\end{pmatrix}$.

◄Мінором першого порядку (k=1) є будь–який елемент матриці. Так 2, –5, –4 – мінори першого порядку.

Мінори другого порядку (k=2):

- візьмемо перетинання рядків 1, 2 і стовпців 1, 2 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$;
- візьмемо перетинання рядків 1, 3 і стовпців 2, 4 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -8$;
- візьмемо перетинання рядків 2, 3 і стовпців 1, 4 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -42$.

Мінори третього порядку (k=3):
рядка тут можна вибрати тільки одним способом.

- візьмемо перетинання всіх рядків і стовпців 1, 3, 4 – одержимо мінор $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -4$;
- візьмемо перетинання всіх рядків і стовпців 1, 2, 3 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -28$.►

Якщо всі мінори матриці A порядку k дорівнюють нулеві, то всі мінори порядку k+1, якщо такі існують, теж дорівнюють нулеві.

Рангом матриці *A* називається найбільший з порядків мінорів матриці A, відмінних від нуля. Ранг нульової матриці вважається рівним нулеві.

Єдине, стандартне, позначення рангу матриці відсутній. Будемо позначати його **rang *A*** або **r(*A*).**

Приклади

Приклад 1. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 6 \\ 5 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

◄Матриця A має ранг 3, тому що є мінор третього порядку, відмінний від нуля, а мінорів четвертого порядку немає.►

Приклад 2. Знайти ранг матриці $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◄Ранг матриці B дорівнює 1, бо є ненульовий мінор першого порядку (елемент матриці b_{13}), а всі мінори другого порядку дорівнюють нулеві.►

Приклад 3. Обчислити ранг матриці $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 16 \\ 8 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

◀Оскільки з первинної матриці можна вирізувати квадратну підматрицю максимально третього порядку, то перевіримо на рівність нулеві, наприклад, підматрицю $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Розкладанням по першому рядку маємо:

$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -64 - 32 = -96 \neq 0$.

Тобто ранг даної матриці дорівнює 3.►

Ранг не виродженої квадратної матриці порядку n дорівнює n, тому що її визначник є мінором порядку n і у не виродженої матриці відмінний від нуля.

При транспонуванні матриці її ранг не міняється, тобто **rang A= rang A^{T}.**

Розглянемо тепер як рядки (стовпці) матриці **залежать друг від друга**. Нехай мається матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Ця матриця складається з рядків і стовпців, що називають векторами.

Позначимо для наочності вектори–стовпці матриці $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, …, $A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Аналогічно, можна було б позначити вектори–рядка матриці.

Лінійною комбінацією векторів A_1, A_2, …, A_n з дійсними коефіцієнтами λ_1, λ_2, …, λ_n називається сума:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

Система стовпців (рядків) називається **лінійно залежною**, якщо існує такий набір коефіцієнтів, з яких хоча б один відмінний від нуля, що лінійна комбінація стовпців (рядків) з цими коефіцієнтами буде дорівнює нулеві, тобто:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = 0.$$

Система стовпців (рядків) є **лінійно незалежної**, якщо лінійна комбінація $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ дорівнює нулеві (нульовому векторові) тільки тоді, коли всі λ_1, λ_2,…,λ_n дорівнюють нулеві.

Система стовпців (рядків) є **лінійно залежною** тоді і тільки тоді, коли один зі стовпців (один з рядків) є лінійною комбінацією інших стовпців (рядків) цієї системи.

Приклад

Визначити лінійну залежність (незалежність) матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

◄Позначимо стовпці матриці A_1, A_2, A_2. Тоді при $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 1$ одержимо: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ або $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \lambda_3 A_3$. Тобто третій стовпець є лінійною комбінацією двох інших стовпців цієї матриці, а значить матриця є **лінійно залежною. ►**

Ранг матриці дорівнює максимальному числу її стовпців (рядків), що утворять лінійно незалежну систему. Якщо визначник матриці дорівнює нулеві, то один з його стовпців (один з рядків) є лінійною комбінацією інших стовпців (рядків).

Теорема: Визначник матриці дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли один з її стовпців (один з рядків) є лінійною комбінацією інших стовпців (рядків).

Знаходження рангу матриці за допомогою обчислення всіх її мінорів вимагає занадто великої обчислювальної роботи. Так, наприклад, у квадратній матриці четвертого порядку 36 мінорів другого порядку. Тому для знаходження рангу застосовуються елементарні перетворення матриць і наступні дії над ними:

1) перестановка рядків або стовпців;

2) множення рядка або стовпця на число відмінне від нуля;

3) додавання до одного з рядків іншого рядка, помноженого на число або додавання до одного зі стовпців іншого стовпця, помноженого на число.

Визначення: При елементарних перетвореннях ранг матриці не міняється.

Алгоритм обчислення рангу матриці схожий на алгоритм обчислення визначника і полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень матриця приводиться до простого вигляду, для якого знайти ранг не представляє клопоту. Оскільки при кожному перетворенні ранг не міняється, то, обчисливши ранг перетвореної матриці, ми тим самим знаходимо ранг первинної матриці.

Нехай ранг матриці дорівнює r. Тоді будь–який мінор порядку r, відмінний від нуля, називається **базисним мінором**.

Приклад

Знайти ранг і базисні мінори матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 8\end{pmatrix}$.

◄Визначник матриці A дорівнює нулеві, тому що третій рядок дорівнює сумі перших двох. Мінор другого порядку, розташований у перших двох рядках і перших двох стовпцях, дорівнює $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0$. Отже, ранг матриці дорівнює двом, і розглянутий мінор є базисним.

Базисним мінором є також мінор, розташований, скажемо, у першому і третьому рядках, першому і третьому стовпцях: $\begin{vmatrix}1 & 6\\ 3 & 8\end{vmatrix}=-10\neq 0$.

Базисним буде мінор у другому і третьому рядках, першому і третьому стовпцях: $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 8\end{vmatrix}=-10\neq 0$. Мінор у першому і другому рядках, другому і третьому стовпцях $\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$ дорівнює нулеві і тому не буде базисним.►

Теорема про базисний мінор: Кожен стовпець матриці є лінійною комбінацією стовпців, що проходять через базисний мінор.

2.12. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+\quad a_{1n}x_n=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} і b_i (i=1, …, m; b=1, …, n) – деякі відомі числа, а $x_1, \ldots, x_n$ – невідомі. У позначенні коефіцієнтів a_{ij} перший індекс i позначає номер рівняння, а другий j – номер невідомого, при якому розташований цей коефіцієнт.

Коефіцієнти при невідомих будемо записувати у вигляді матриці $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$, яку назвемо *матрицею системи*.

Числа, що розташовані у правих частинах рівнянь, $b_1, \ldots, b_m$ називаються *вільними членами*.

Сукупність n чисел $C_1, \ldots, C_n$ називається *рішенням* даної системи, якщо кожне рівняння системи звертається у рівність після підстановки у нього чисел $C_1, \ldots, C_n$ замість відповідних невідомих $x_1, \ldots, x_n$.

Наша задача буде полягати у знаходженні рішень системи. При цьому можуть виникнути три ситуації:

1. Система може мати єдине рішення.

Наприклад, $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 11 \\ 4x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$.

Рішенням цієї системи буде єдина пара (x_1=2; x_2=2,5).

2. Система може мати нескінченну множину рішень.

Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$.

Рішенням цієї системи є будь–яка пара чисел, що відрізняються одне від одного тільки знаком.

3. І третій випадок, коли система взагалі не має рішення.

Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$,

якби рішення існувало, то $x_1 + x_2$ дорівнювало б одночасно нулеві й одиниці.

2.13. Правило Крамера для рішення СЛАР

Розглянемо систему 3–х лінійних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Визначник третього порядку, що відповідає матриці системи, тобто складений з коефіцієнтів при невідомих,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи*.

Складемо ще три визначники у такий спосіб: замінимо у визначнику Δ послідовно 1, 2 і 3 стовпці стовпцем вільних членів

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тоді можна сформулювати наступну теорему:

Теорема (правило Крамера). Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то розглянута система має одне і тільки одне рішення, причому:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Якщо ж визначник системи дорівнює нулеві, то система або має нескінченну безліч рішень, або не має рішень, тобто несумісна.

Після знаходження рішень, необхідно зробити перевірку, підставивши знайдені рішення у кожне з рівнянь первинної системи.

Приклади

Приклад 1. Вирішити систему рівнянь $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$.

◄ $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-5+2\cdot4-11=-8\neq0;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}\underline{2} & 2 & -1\\ \underline{2} & -3 & 2\\ \underline{8} & 1 & 1\end{vmatrix}=-10+28-26=-8;$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & \underline{2} & -1\\ 2 & \underline{2} & 2\\ 3 & \underline{8} & 1\end{vmatrix}=-14+8-10=-16;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & \underline{2}\\ 2 & -3 & \underline{2}\\ 3 & 1 & \underline{8}\end{vmatrix}=-26-20+22=-24.$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-8}{-8}=1,\; x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-16}{-8}=2,\; x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-24}{-8}=3.$$

Отже, x=1, y=2, z=3. ►

Приклад 2. Вирішите систему рівнянь при різних значеннях параметра p: $\begin{cases} px+30y=p+30, \\ 30x+py=0 \end{cases}$.

◄Система має єдине рішення, якщо $\Delta\neq0$.

$\Delta=\begin{vmatrix}p & 30\\ 30 & p\end{vmatrix}=p^2-30^2\neq0$. Тому $p\neq\pm30$.

$\Delta_1=\begin{vmatrix}p+30 & 30\\ 0 & p\end{vmatrix}=p(p+30);\; \Delta_2=\begin{vmatrix}p & p+30\\ 30 & 0\end{vmatrix}=-30(p+30).$

1. При $p\neq\pm30$:

$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p(p+30)}{p^2-30^2}=\frac{p}{p-30},\; x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-30(p+30)}{p^2-30^2}=\frac{-30}{p-30}$, тобто

$x=\frac{p}{p-30},\; y=\frac{-30}{p-30}.$

2. При p=30 одержуємо систему рівнянь $\begin{cases}30x+30y=60\\ 30x+30y=0\end{cases}$, яка не має рішень.

3. При p=–30 система приймає вигляд $\begin{cases}-30x+30y=0\\ 30x-30y=0\end{cases}$ і, отже, має нескінченну безліч рішень $x=y,\ y\in R$.►

Приклад 3. Хлібозавод випікає хлібобулочні вироби трьох видів, використовуючи при цьому борошно пшеничне трьох сортів. Необхідні характеристики виробництва приведені в таблиці. Знайти обсяг випуску кожного виду продукції за добу.

Вид сировини	Норма витрати сировини на од. продукції, кг			Витрата сировини за добу, кг.
	Батон	Булочки	Хліб	
Вищий сорт	0,2	0,07	0,1	2480
I–сорт	0,1	0,01	0,4	3240
II–сорт	0,05	0,0	0,2	1600

◄Позначимо через x_1, x_2, x_3 обсяг випуску батонів, булочок і хліба за добу. Тоді, використовуючи дані таблиці, можна записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,2\cdot x_1+0,07\cdot x_2+0,1\cdot x_3=2480, \\ 0,1\cdot x_1+0,01\cdot x_2+0,4\cdot x_3=3240, \\ 0,05\cdot x_1+0\cdot x_2+0,2\cdot x_3=1600. \end{cases}$$

Вирішимо поставлену задачу методом Крамера з використанням електронних таблиць *Calc* офісного пакета *OpenOffice.* Для рішення СЛАР за формулами Крамера необхідно спочатку знайти визначник основної матриці системи Δ.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0,2 & 0,07 & 0,1 \\ 0,1 & 0,01 & 0,4 \\ 0,05 & 0 & 0,2 \end{vmatrix}.$$

Для обчислення визначника матриці виділимо осередок, у якому буде знаходиться шуканий визначник. За допомогою «Майстра функцій» треба викликати функцію «MDETERM» і виділити діапазон осередків, у якому розташовується первинна матриця. Уведення функції необхідно завершити натисканням клавіші Enter (або щигликом лівої кнопки миші по ОК у вікні «Майстра функцій»).

Далі треба скласти визначники Δ_1, Δ_2 і Δ_3, отримані з визначника основної матриці послідовною заміною 1, 2 і 3 стовпців стовпцем вільних членів. Потім необхідно за допомогою убудованої функції «MDETERM» знайти числові значення цих визначників.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \underline{2480} & 0,07 & 0,1 \\ \underline{3240} & 0,01 & 0,4 \\ \underline{1600} & 0 & 0,2 \end{vmatrix};\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 0,2 & \underline{2480} & 0,1 \\ 0,1 & \underline{3240} & 0,4 \\ 0,05 & \underline{1600} & 0,2 \end{vmatrix};\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 0,2 & 0,07 & \underline{2480} \\ 0,1 & 0,01 & \underline{3240} \\ 0,05 & 0 & \underline{1600} \end{vmatrix}.$$

Використовуючи формули Крамера $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$ треба підрахувати корені рівняння.

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{2,8}{0,0035}=8000,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1,4}{0,0035}=4000,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{2,1}{0,0035}=6000.$$

Отже, за добу хлібозавод випікає 8000 батонів, 4000 булочок і 6000 хлібів. ►

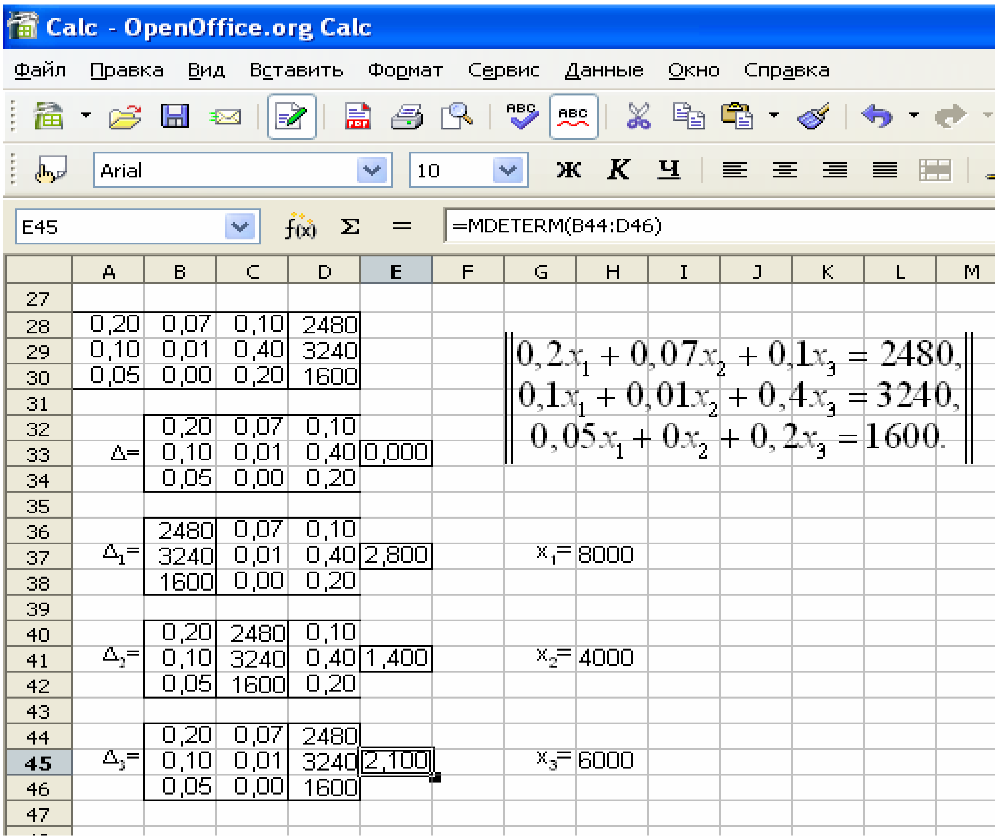


Рис. 2.4. Фрагмент виконання обчислень у *OpenOffice Calc*

2.14. Рішення СЛАР за допомогою зворотної матриці

Нехай дана система з 3–х рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Розглянемо матрицю системи $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ і матриці стовпців невідомих і вільних членів $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добуток $AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$, тобто у результаті добутку ми одержуємо ліві частини рівнянь даної системи. Тоді користуючись визначенням рівності матриць дану систему можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ або у скороченому вигляді $A \cdot X = B$.

Тут матриці A і B відомі, а матриця X невідома. Її і потрібно знайти, тому що її елементи є рішенням даної системи. Це рівняння називають *матричним рівнянням*.

Нехай визначник матриці відмінний від нуля $|A| \neq 0$. Тоді матричне рівняння вирішується у такий спосіб. Помножимо обидві частини рівняння зліва на матрицю A^{-1}, зворотну до матриці A: $A^{-1}\left(AX\right) = A^{-1}B$ або $\left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B$.

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $E \cdot X = X$, то одержуємо рішення матричного рівняння у вигляді $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$.

Помітимо, що оскільки зворотну матрицю можна знайти тільки для квадратних матриць, то матричним методом можна вирішувати тільки ті системи, у яких число рівнянь збігається з числом невідомих. Після знаходження рішень, необхідно зробити перевірку, підставивши знайдені рішення у кожне з рівнянь первинної системи.

Приклади

Приклад 1. Вирішити систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - y = 4 \end{cases}$.

◄ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. $X = A^{-1}B$.

Знайдемо матрицю зворотну матриці A.

$|A| = -5$, $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $x = 3$, $y = -1$. ►

Приклад 2. Вирішите матричне рівняння: $XA+B=C$, де

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

◄Виразимо шукану матрицю X із заданого рівняння.

$$XA = C - B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Помножимо обидві частини рівняння праворуч на матрицю A^{-1}, зворотну до матриці A: $XAA^{-1} = \left(C - B\right) \cdot A^{-1}$ або $X = \left(C - B\right) \cdot A^{-1}$.

Знайдемо матрицю A^{-1}.

$|A| = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$; $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = \left(C - B\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $XA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$XA+B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}=C.$$ ▶

Приклад 3. Вирішити систему рівнянь $\begin{cases}x_1+2x_2=10,\\ 3x_1+2x_2+x_3=23,\\ x_2+2x_3=13.\end{cases}$

◀ $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10\\ 23\\ 13\end{pmatrix}$.

Рішення будемо шукати у вигляді $X = A^{-1}B$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3-12=-9,\quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix},\quad A^{-1}=-\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 23\\ 13\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-36\\ -27\\ -45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 5\end{pmatrix}.$$

Отже, x_1=4, x_2=3, x_3=5.▶

Приклад 4. Розв'яжіть матричне рівняння $AX+B=C$, де

$A=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & -8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -5\end{pmatrix}$.

◀З рівняння одержуємо $X=A^{-1}(C-B)$.

$$(C-B)=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}7 & 4\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-7+8=1,\quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix},\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 7\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 7\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -12\\ 2 & 21\end{pmatrix}.$$ ▶

Приклад 4. Учасник ринку цінних паперів оцінює прибуток від вкладень свого капіталу в три види акцій за останні три роки. Знайти суму вкладень коштів у кожний з видів акцій, якщо відомо відсоток прибутку по видах акцій і загальний прибуток окремо по кожному року.

Період	Відсоток прибутку по видах акцій, %			Загальний прибуток, млн. грн.
	Акції 1	Акції 2	Акції 3	
2003 р.	20	22	14	14

2004 р.	18	20	18	14
2005 р.	21	20	15	14

◄Позначимо через x_1, x_2, x_3 суму вкладень капіталу, відповідно, у перший, другий і третій вид акцій. Тоді, використовуючи дані таблиці, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,20\cdot x_1+0,22\cdot x_2+0,14\cdot x_3=14, \\ 0,18\cdot x_1+0,20\cdot x_2+0,18\cdot x_3=14, \\ 0,21\cdot x_1+0,20\cdot x_2+0,15\cdot x_3=14. \end{cases}$$

Вирішимо поставлену задачу методом зворотної матриці з використанням електронних таблиць *Calc* офісного пакета *OpenOffice.*

Основна матриця системи $A=\begin{pmatrix} 0,20 & 0,22 & 0,14 \\ 0,18 & 0,20 & 0,18 \\ 0,21 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}$, матриця вільних членів $B=\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$, і матриця невідомих $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Рішення матричного рівняння знаходимо за формулою $X=A^{-1}\cdot B$.

а) знаходимо зворотну матрицю з використанням убудованої функції «MINVERSE»;

б) знаходимо рішення матричного рівняння з використанням убудованої функції «MMULT».

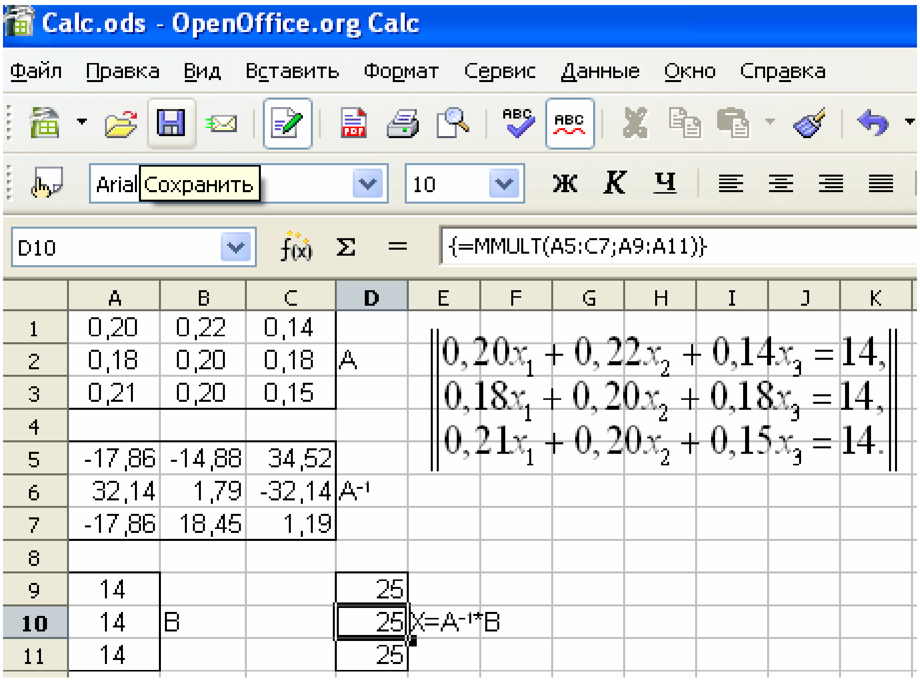


Рис. 2.5. Фрагмент виконання обчислень у *OpenOffice Calc*

Отже, суми вкладень капіталу, відповідно, у перший, другий та третій вид акцій x_1=25 млн. грн., x_2=25 млн. грн., x_3=25 млн. грн.►

2.15. Індивідуальне завдання № 2.4

Студент має розв'язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Вирішити записані нижче СЛАР:
а) методом Крамера; б) матричним методом.

Вар	Завдання	Вар	Завдання
1.	$\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=12, \\ x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=1. \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+x_3=6, \\ 2x_1+x_2+3x_3=6. \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 5x_1+x_2+2x_3=8, \\ 3x_1-3x_2+x_3=3. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+5x_2+3x_3=4, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=9. \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=5, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4, \\ 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ 4x_1+x_2+4x_3=9. \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 3x_1-x_2=2, \\ -2x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=5. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=3, \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-6, \\ x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1-x_2-6x_3=-5, \\ 3x_1-2x_2=1. \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ 3x_1-6x_2+x_3=3. \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-2, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=2, \\ 2x_2+7x_3=9. \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=7, \\ 2x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2-x_3=-2. \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=1, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-4. \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=9, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-2, \\ x_1+5x_2+x_3=7. \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=4, \\ x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 2x_2-x_3=1. \end{cases}$

17.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$	18.	$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$
19.	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$	20.	$\begin{cases} 11_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$
21.	$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 14, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$	22.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$
23.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$	24.	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$
25.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$	26.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$
27.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$	28.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$
29.	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$	30.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$
31.	$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -15, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$		

2.16. Існування рішення СЛАР загального вигляду. Теореми Кронекера–Капеллі

СЛАР називається сумісною, якщо вона має хоча б одне рішення, і несумісною – у противному випадку, тобто у випадку, коли рішень у системи немає.

Питання про те, чи має система рішення чи ні, зв'язане не тільки зі співвідношенням числа рівнянь і числа невідомих n. Наприклад, система з трьох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

має рішення $x_1=2$, $x_2=-1$ і навіть має нескінченно багато рішень, а система з двох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

рішень не має, тобто є несумісною.

Будемо називати **розширеною матрицею** системи лінійних рівнянь матрицю A^*, що відрізняється від матриці A системи наявністю додаткового стовпця з вільних членів:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Помітимо, що ранг розширеної матриці A^* або дорівнює рангові матриці системи A, або більше його на одиницю.

Тоді, відповідь на питання про сумісність довільної системи рівнянь дає приведена нижче теорема Кронекера–Капеллі I.

Теорема Кронекера–Капеллі I (умова сумісності). Система лінійних рівнянь є сумісною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи A дорівнює рангові розширеної матриці A^*. Система лінійних алгебраїчних рівнянь буде мати при цьому хоча б одне рішення.

У системі $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ rang A = rang A^* = 1 і система є сумісною.

У системі $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ rang A = 1; rang A^* = 2. Тобто ранг матриці системи не дорівнює рангові розширеної матриці і, по теоремі Кронекера–Капеллі, система є несумісною.

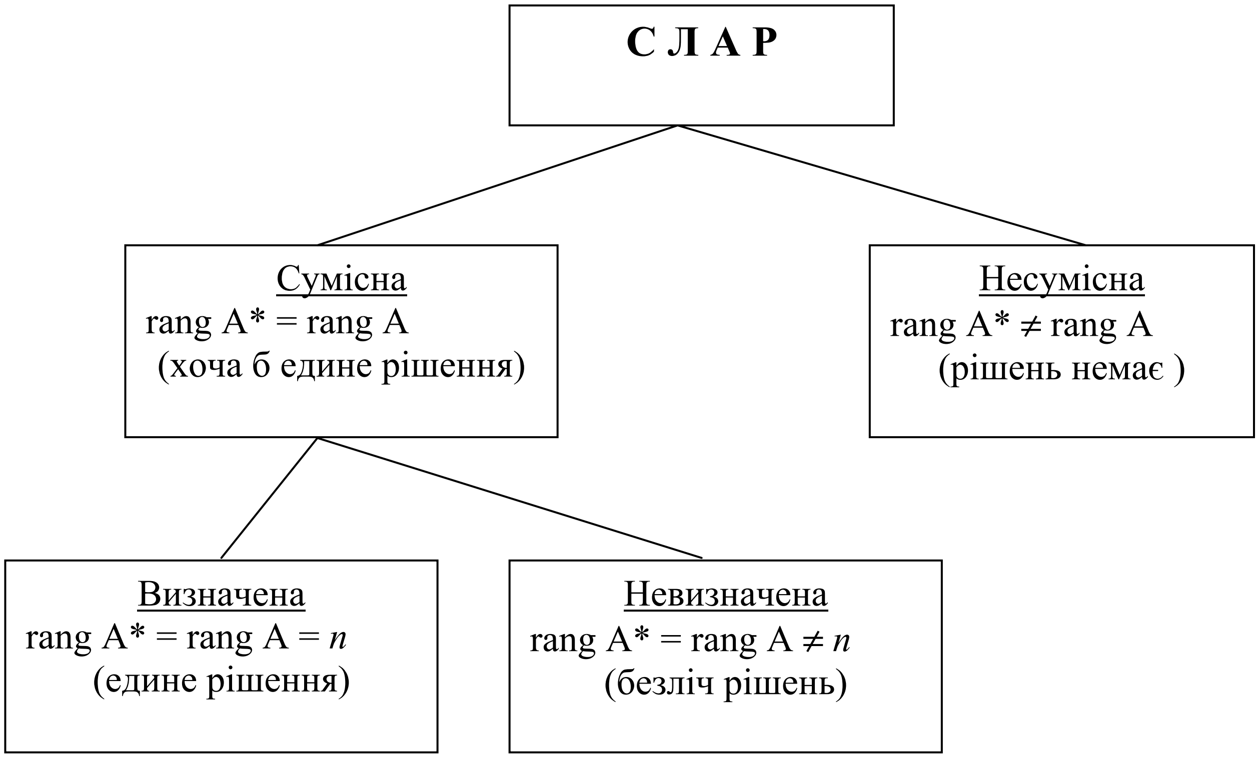
Теорема Кронекера–Капеллі II (умова визначеності).

Сумісна система є визначеною, якщо ранг матриці A системи дорівнює кількості невідомих:

$$\text{rang } A = \text{rang } A^* = n.$$

Система при цьому має одне єдине рішення. Якщо ж rang A < n, то система має незліченну кількість рішень.

Хоча теореми Кронекера–Капеллі дають можливість визначити, чи є система сумісною і визначеною, застосовуються вони досить рідко, в основному у теоретичних дослідженнях. Причина полягає у тім, що обчислення, виконувані при знаходженні рангу матриці, у основному збігаються з обчисленнями при знаходженні рішення системи. Тому, звичайно замість того, щоб знаходити rang$A$ і rangA^*, шукають рішення системи. Якщо його вдається знайти, то довідаємося, що система сумісна й одночасно одержуємо її рішення. Якщо рішення не вдається знайти, то робимо висновок, що система несумісна.



Приклади

Приклад 1. За допомогою теореми Кронекера–Капеллі визначити, чи має рішення система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 7. \end{cases}$$

◄Запишемо розширену матрицю заданої системи і знайдемо rang A и rang A^*. Для цього, використовуючи властивості матриць, приведемо матрицю до трапеціїдального вигляду:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - l_1/2 \\ l_3 - 2l_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 13 & -12 & 1 \end{bmatrix}_{l_3 - 2l_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут rang A = rang A^* = 2, а кількість невідомих n = 3. Тому система є сумісної, невизначеної і має незліченну кількість рішень. ►

Приклад 2. За допомогою теореми Кронекера–Капеллі визначити, чи має рішення система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$

◀Запишемо розширену матрицю заданої системи і знайдемо rang A и rang A^*:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - l_1/2 \\ l_3 - 2l_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 13 & -13 & 1 \end{bmatrix}_{l_3 - 2l_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут rang A = rang A^* = 3 = n. Тому система є не тільки сумісної, але і визначеної і має одне рішення.▶

Приклад 3. За допомогою теореми Кронекера–Капеллі визначити, чи має рішення система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$$

◀Запишемо розширену матрицю заданої системи і знайдемо rang A и rang A^*:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - l_1/2 \\ l_3 - 2l_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 13 & -12 & 2 \end{bmatrix}_{l_3 - 2l_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тут rang A = 2, а rang A^* = 3. Тому розглянута система не є сумісною. Вона не має рішень.▶

2.17. Індивідуальне завдання № 2.5

Студент має розв’язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Використовуючи I і II теореми Кронекера–Капеллі, досліджувати записані нижче системи лінійних алгебраїчних рівнянь на можливість розв'язання. Вирішити сумісні СЛАР.

Вар	**Завдання**		
	а)	**б)**	**в)**
1.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

2.	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 3x_1+x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1, \\ -x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+x_3=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=2, \\ 3x_1+x_2+2x_3=1, \\ 5x_1+4x_2+4x_3=5. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=4, \\ x_1-3x_2+2x_3=4, \\ 3x_1+x_2+5x_3=2. \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+x_2+5x_3=1, \\ 2x_1+4x_2+3x_3=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+x_2+5x_3=1, \\ x_1-3x_2+2x_3=3, \\ 4x_1-2x_2+7x_3=2. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} 3x_1-4x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3=3, \\ 4x_1-5x_2+3x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1-4x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3=2, \\ 5x_1-x_2+3x_3=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 8x_1+x_2+5x_3=1. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} -x_1+3x_2+11x_3=2, \\ -5x_1+5x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ -x_1+3x_2+11x_3=3, \\ x_1+5x_2+13x_3=5. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-3x_2-11x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ 3x_1-x_2-9x_3=4. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} -2x_1-2x_2+x_3=3, \\ -2x_1+x_2+x_3=1, \\ -x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+x_2-x_3=1, \\ -x_1+2x_2=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=1, \\ -x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1-2x_2=5. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1-x_2-x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2-2x_3=1, \\ 3_1+x_2-5x_3=4. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=2, \\ x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1-4x_2-4x_3=5. \end{cases}$
8.	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=1, \\ 3x_1+x_2-5x_3=-4, \\ 5x_1-2x_2-x_3=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-1, \\ 5x_1-x_2+3x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 5x_1-x_2+3x_3=2, \\ 7x_1-4x_2+7x_3=1. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=10, \\ 2x_1+x_2+3x_3=8, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-3, \\ 4x_1+4x_2+5x_3=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=-1, \\ x_1-2x_2+x_3=8, \\ 3x_1+x_2+3x_3=5. \end{cases}$
10.	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1-x_2-2x_3=-1, \\ 5x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+3x_3=2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3=-1, \\ -x_1+x_2+2x_3=1. \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-x_3=3, \\ 4x_1+5x_2-2x_3=8. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=3, \\ 5x_1+7x_2+3x_3=5. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1+5x_2-2x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=4, \\ 6x_1+8x_2+2x_3=1. \end{cases}$

12.	$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=3, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-7, \\ 5x_1-4x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=2, \\ 3x_1+x_2-x_3=-1, \\ 5x_1-4x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ 3x_1+x_2-x_3=2. \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=4, \\ 5x_1+x_2+3x_3=2, \\ 8x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9, \\ 5x_1+x_2+3x_3=-4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=9, \\ 3x_1+x_2-2x_3=4 \\ 5x_1-2x_2-x_3=3. \end{cases}$
14.	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=2, \\ 5x_1+2x_2+x_3=5. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=4, \\ x_1+3x_2-x_3=3, \\ 4x_1+5x_2+x_3=10. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1-x_2+3x_3=2, \\ 7x_1+x_2+4x_3=3. \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=5, \\ 2x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1+5x_2-x_3=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5, \\ 4x_1+x_2+3x_3=7. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1+5x_2-x_3=2, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=0. \end{cases}$
16.	$\begin{cases} 3x_1+4x_2-4x_3=5, \\ 2x_1+x_2+4x_3=3, \\ 5x_1+5x_2-x_3=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8, \\ 5x_1+5x_2-x_3=-1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 2x_1-x_2-3x_3=3, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8. \end{cases}$
17.	$\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3=9, \\ x_1-x_2-x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+x_3=5. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=2, \\ 7x_1+5x_2+2x_3=9, \\ 8x_1+6x_2+4x_3=5. \end{cases}$
18.	$\begin{cases} 8x_1-5x_2-x_3=5, \\ -4x_1+7x_2-x_3=10, \\ -4x_1+x_2+5x_3=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 8x_1-5x_2-x_3=5, \\ -4x_1+x_2+5x_3=3, \\ 4x_1-4x_2+4_3=8. \end{cases}$	$\begin{cases} -4x_1+x_2+5x_3=3, \\ 8x_1-5x_2-x_3=4, \\ 4x_1-4x_2+4x_3=3. \end{cases}$
19.	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3=2, \\ 4x_1+2x_2=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1+2x_2=3, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=2, \\ x_1+5x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=2, \\ 4x_1+3x_2-3x_3=7. \end{cases}$
20.	$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=2, \\ 5x_1+5x_2-x_3=6. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=3, \\ 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 4x_1+x_3=10. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 2x_1-x_2-3x_3=3, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=2. \end{cases}$
21.	$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=7, \\ 2x_1-x_2-x_3=5, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=7. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=3, \\ x_1+5x_2-x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=8. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=5, \\ x_1+5x_2-x_3=7, \\ 2x_1-7x_2+5x_3=1. \end{cases}$

22.	$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1-2x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-5x_2-4x_3=4. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-3x_3=5. \end{cases}$
23.	$\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3=14, \\ x_1-x_2-x_3=-1, \\ x_1+x_2+2x_3=4. \end{cases}$	$\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3=14, \\ x_1-x_2-x_3=-1, \\ 8x_1+4x_2+x_3=13. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=4, \\ 3x_1-x_2=5. \end{cases}$
24.	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ 3x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ 3x_1-x_2+x_3=4, \\ 4x_1+2x_2=10. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=4, \\ 2x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1-2x_2=1. \end{cases}$
25.	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ x_1+5x_2+x_3=6. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ x_1+5x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 5x_1+3x_2-x_3=2. \end{cases}$
26.	$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ x_1+x_2+2x_3=-1, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2, \\ -2x_1-2x_2-2x_3=-8. \end{cases}$
27.	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1-x_2-6x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2=8. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1-2x_2=8, \\ x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1-3x_2-x_3=6. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-6x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2=8, \\ -x_1+x_2-6x_3=5. \end{cases}$
28.	$\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ -2x_1+x_2-x_3=5. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ x_1+5x_2+x_3=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 5x_1+3x_2-x_3=7. \end{cases}$
29.	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1+5x_2+x_3=-7, \\ x_1-2x_2-x_3=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-7, \\ 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=2, \\ x_1+5x_2+x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2=-5. \end{cases}$
30.	$\begin{cases} 3x_1-x_2+5x_3=7, \\ x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=12, \\ x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=1, \\ 3x_1-x_2+5x_3=2. \end{cases}$
31.	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=11, \\ 2x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1-x_2+5x_3=7. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 5x_1+3x_2-3x_3=7. \end{cases}$

2.18. Однорідна система рівнянь. Фундаментальна система. Загальне рішення системи

Система *m* лінійних рівнянь з *n* змінними називається системою лінійних *однорідних* рівнянь, якщо всі їхні вільні члени дорівнюють нулеві. Така система має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Система лінійних *однорідних* рівнянь завжди є сумісною, тому що вона завжди має, принаймні, нульове (або тривіальне) рішення $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$. У цьому розділі ми будемо використовувати матричний запис системи: $AX = 0$, де A – матриця коефіцієнтів при змінних.

Якщо у такій системі *m* = *n*, а її визначник відмінний від нуля, то така система має тільки нульове рішення, як це випливає з теореми і формул Крамера. Дійсно, за формулами Крамера рішення системи однозначно визначаються формулою $x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$ (*j*=1, 2, …, *n*). Знаменник – це визначник основної матриці $|A| \neq 0$, а чисельник – визначник, що виходить з визначника основної матриці заміною її *j* стовпця на стовпець вільних членів (зі збереженням без зміни всіх інших стовпців). Оскільки у однорідній системі стовпець вільних членів дорівнює нулеві, то із властивостей визначників – усі визначники $|A_j|$ будуть дорівнюють нулеві, і, відповідно, усі рішення системи теж будуть дорівнюють нулеві.

<u>Приклад</u>

Знайти рішення СЛАР $\begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x + 2y + z = 0, \\ 4x + 11y - z = 0 \end{cases}$

◄ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -13 + 18 - 14 = -9 \neq 0$, а значить $x=y=z=0$.►

Теорема. Для того, щоб система лінійних однорідних рівнянь мала ненульове рішення, необхідно і досить, щоб Δ ≠ 0.

Отже, якщо визначник Δ ≠ 0, то система має єдине рішення. Якщо ж Δ = 0, то система лінійних однорідних рівнянь має нескінченну безліч рішень.

Ненульові рішення, отже, можливі лише для таких систем лінійних однорідних рівнянь, у яких число рівнянь менше числа змінних або при їхній рівності, коли визначник системи дорівнює нулеві. Інакше: *система лінійних однорідних рівнянь має ненульові рішення тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи менше числа змінних, тобто при* rang $A < n$. Якщо однорідна система лінійних рівнянь має ненульове рішення, то вона має нескінченно багато різних рішень.

Позначимо які–небудь ненульові рішення системи у вигляді векторів–стовпців $X_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}$. Сформулюємо дві основних властивості рішень системи лінійних однорідних рівнянь:

1. Рішення, помножене на число, теж є рішенням. Наприклад, $\lambda X_1 = \begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \\ \dots \\ \lambda p_n \end{pmatrix}$ – теж рішення системи.

2. Сума рішень однорідної системи лінійних рівнянь є рішенням цієї системи.

Переконатися у справедливості зазначених властивостей можна безпосередньою підстановкою їх у рівняння системи.

Набір рішень X_1, X_2, …, X_k однорідної системи рівнянь називається **фундаментальною системою рішень** лінійної системи рівнянь.

Інакше: рішення X_1, X_2, …, X_k системи $AX = 0$ утворять ***фундаментальну систему рішень****, якщо стовпці X_1, X_2, …, X_k утворять лінійно незалежну систему і будь–яке рішення системи є лінійною комбінацією цих стовпців.*

Нехай X_1, X_2, …, X_k – фундаментальна система рішень однорідної системи $AX = 0$. Тоді вираз

$$X = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_3 + \ldots + C_k \cdot X_k,$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – довільні числа, будемо називати **загальним рішенням системи** $AX = 0$.

З визначення фундаментальної системи рішень випливає, що будь–яке рішення однорідної системи може бути отримане із загального рішення при деяких значеннях $C_1, C_2, \ldots, C_k$. І навпаки, при будь–яких фіксованих числових значеннях $C_1, C_2, \ldots, C_k$ із загального рішення одержимо рішення однорідної системи.

Теорема Нехай X_1, X_2, …, X_k – фундаментальна система рішень однорідної системи $AX = 0$. Позначимо k – число рішень цієї фундаментальної системи. Тоді rang $A + k = n$, де n – число невідомих у системі. І навпаки, усяка фундаментальна система рішень складається з k рішень, причому, $k = n -$ rang A.

2.19. Структура рішень неоднорідної системи лінійних рівнянь

Нехай дана система m неоднорідних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}.$$

У матричному вигляді таку систему запишемо $AX = B$, де матриця A має розміри $m \times n$.

Нехай c і d – рішення неоднорідної системи $AX = B$. Тоді їхня різниця $g=c-d$ є рішенням однорідної системи з тією же матрицею, тобто рішенням системи $AX = 0$.

Нехай c – рішення неоднорідної системи $AX = B$, g – будь–яке рішення однорідної системи $AX = 0$. Тоді $d=c+g$ – рішення неоднорідної системи.

Визначення. Нехай X_0 – деяке рішення неоднорідної системи лінійних рівнянь $AX = B$, z – загальне рішення однорідної системи $AX = 0$. Тоді вираз $X=X_0+z$ називається **загальним рішенням неоднорідної системи**.

З огляду на запис загального рішення однорідної системи через фундаментальну систему її рішень X_1, X_2, …, X_k одержуємо для загального рішення неоднорідної системи формулу

$$X = X_0 + C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_3 + \ldots + C_k \cdot X_k .$$

Інакше, *загальне рішення системи m лінійних рівнянь з n змінними дорівнює сумі загального рішення відповідної їй системи однорідних лінійних рівнянь і довільного частинного рішення цієї системи*.

З двох останніх пропозицій випливає, що будь–яке рішення неоднорідної системи може бути отримане з загального рішення при деяких числових значеннях коефіцієнтів $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Теорема. Система лінійних рівнянь $AX = B$ може мати або нескінченно багато рішень, або одне рішення, або не мати рішень.

2.20. Рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса

Нехай дана система m лінійних рівнянь з n невідомими $AX = B$. Потрібно знайти її загальне рішення, якщо вона сумісна, або установити її несумісність.

Назвемо елементарними операціями наступні дії з матрицями:

- перестановка рядків;
- множення рядка на число, відмінне від нуля;
- додавання рядка з іншим рядком, помноженої на число.

Відзначимо, що при рішенні системи рівнянь, на відміну від обчислення визначника і знаходження рангу, *не можна оперувати зі стовпцями*.

Пропонований алгоритм називається методом Гауса або методом послідовного виключення невідомих. Ціль алгоритму – за допомогою застосування послідовності елементарних операцій домогтися того, щоб кожен рядок, крім, бути може, першого, починався з нулів, і число нулів до першого ненульового елемента у кожному наступному рядку було більше, ніж у попередньому.

Для застосування даного алгоритму потрібно, щоб у системі коефіцієнт a_{11} був відмінний від нуля. Якщо це не так, то доцільно на перше місце поставити рівняння з відмінним від нуля коефіцієнтом при x_1 і знову позначити коефіцієнти. Щоб не нагромаджувати додаткових позначень, будемо вважати, що така зміна рядків уже зроблена, тобто $a_{11} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

<u>Крок 1</u>: помножимо кожне рівняння, крім першого, на множник $\dfrac{a_{11}}{a_{i1}}$, де *i* номер рівняння у системі (номер рядка системи).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 \cdot \dfrac{a_{11}}{a_{21}} + a_{22}x_2 \cdot \dfrac{a_{11}}{a_{21}} + \dots + a_{2m}x_m \cdot \dfrac{a_{11}}{a_{21}} = b_2 \cdot \dfrac{a_{11}}{a_{21}}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{n1}x_1 \cdot \dfrac{a_{11}}{a_{n1}} + a_{n2}x_2 \cdot \dfrac{a_{11}}{a_{n1}} + \dots + a_{nm}x_m \cdot \dfrac{a_{11}}{a_{n1}} = b_n \cdot \dfrac{a_{11}}{a_{n1}} \end{cases}$$

Після даного кроку всі коефіцієнти при змінної x_1 у всіх рівняннях рівні a_{11}.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{11}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2m}x_m = b'_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{11}x_1 + a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nm}x_m = b'_n \end{cases}$$

<u>Крок 2</u>: Віднімемо з кожного рівняння системи, починаючи з другого, перше рівняння. Одержимо систему, у якій усі коефіцієнти при x_1 у всіх рівняннях, крім першого звернулися у нуль.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \qquad\quad a''_{22}x_2 + \dots + a''_{2m}x_m = b''_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ \qquad\quad a''_{n2}x_2 + \dots + a''_{nm}x_m = b''_n \end{cases}$$

<u>Крок 3:</u> Повторити кроки 1–2 для другого стовпця, починаючи з третього рівняння і т.д.

Кроки 1–3 – називаються *прямим ходом* методу Гауса. Прямий хід продовжується доти, поки не реалізується один із трьох можливих випадків:

Випадок 1

Якщо у матриці на якому–небудь кроці зустрівся рядок з номером k, у якому всі елементи при змінних дорівнюють нулеві, а вільний член рівняння не дорівнює нулеві, то виконання алгоритму зупиняємо і робимо висновок, що система несумісна. Дійсно, k–те рівняння буде мати вигляд: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_k''$. Цьому рівнянню не задовольняє жоден набір чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Розглянемо приведену систему з трьох невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ & & & & 0 & = & b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array} \right|.$$

У даному випадку система, через останнє рівняння, несумісна й отже не має рішень.

Зауваження 1. При рішенні методом Гауса зручніше переходити при прямому ході від первинної системи рівнянь до розширеної матриці системи, а при зворотному ході навпаки.

Зауваження 2. Для виключення помилки при округленні дробових виражень можна скористатися елементарними операціями над матрицями, зокрема множення рядка на число, відмінне від нуля.

Приклад

Вирішити СЛАР $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$.

◄<u>Крок 1</u>: Для коефіцієнтів, що розташовані у першому стовпці знайдемо найменший загальний дільник і помножимо усі рівняння системи на таке число, щоб усі коефіцієнти, що розташовані у першому стовпці, дорівнювали цьому загальному дільникові.

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{array} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c} 6 & 9 & -3 & 3 & 15 \\ 6 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 36 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{array} \right\|.$$

<u>Крок 2:</u> Віднімемо з кожного рівняння системи, починаючи з другого, перше рівняння. Одержимо систему, у якій усі коефіцієнти при x_1 у всіх рівняннях, крім першого обернулися у нуль.

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 6 & 9 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & -11 & 7 & -1 & -13 \\ 0 & 3 & 21 & 21 & 21 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & -14 \end{array} \right\|.$$

Крок 3: Повторюємо кроки 1–2 для другого стовпця, починаючи з другого рівняння.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 55 & -35 & 5 & 65 \\ 0 & 55 & 385 & 385 & 385 \\ 0 & 55 & -77 & -33 & 154 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 55 & -35 & 5 & 65 \\ 0 & 0 & 420 & 380 & 320 \\ 0 & 0 & -42 & -38 & 89 \end{array}\right\|.$$

Крок 4: Повторюємо кроки 1–2 для третього стовпця, починаючи з третього рівняння.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -7 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 42 & 38 & 32 \\ 0 & 0 & 42 & 38 & -89 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -7 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 42 & 38 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -121 \end{array}\right\|.$$

Одержали систему, у якій коефіцієнти при x_3 і x_4 у рівнянні 4 обернулися у нуль.

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 & +3\cdot x_2 & -x_3 & +x_4 & =5, \\ & 11\cdot x_2 & -7\cdot x_3 & +x_4 & =13, \\ & & 42\cdot x_3 & +38\cdot x_4 & =32, \\ & & 0\cdot x_3 & +0\cdot x_4 & =-121 \end{cases}$$

Отже, останнє рівняння суперечливе – воно звелося до невірної рівності. У даному випадку система несумісна і, отже, не має рішень. Розглянемо основну матрицю системи, її ранг очевидно rang A = 3. Розглянемо розширену матрицю системи і мінор із других, третіх, четвертого стовпців і стовпця вільних членів. Одержимо мінор четвертого порядку. Отже, ранг матриці системи менше рангу розширеної матриці rang A < rang A*, тобто система не має рішень.►

Випадок 2

Якщо у результаті перетворень одержуємо систему з матрицею коефіцієнтів трикутного вигляду, то система є сумісною і визначеною. Розглянемо приведену систему з трьох невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right|$$

У даному випадку система має єдине рішення, що виходить послідовним знаходженням змінних, починаючи з останнього рівняння. Цей процес знаходження змінних називається *зворотним ходом методу Гауса*.

$$\begin{gathered} x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}; \quad x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}x_3\right) = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right); \\ x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right) - a_{13}\frac{b_3}{a_{33}}\right). \end{gathered} \tag{2.2}$$

У даному випадку ранг основної матриці rang A =3, ранг розширеної матриці також rang A* =3, тобто rang A = rang A*.

<u>Приклад</u>

На минулих виборах на посаду мера міста претендувало три кандидати. Маються результати голосування по трьох виборчих дільницях, виражені у відсотках, а також загальна кількість голосів, що проголосували «так» за кожного кандидата по всьому округу (всі три дільниці разом). Визначити чисельність громадян, що брали участь у голосуванні, на кожній виборчій дільниці.

Кандидати	Результати голосування по трьох виборчих дільницях, %			Усього, «так» чол.
	дільниця №1	дільниця №2	дільниця №3	
№1	20	25	30	2360
№2	45	50	50	4540
№3	35	25	20	2410

◄Позначимо через x_1, x_2, x_3 чисельність громадян, що брали участь у голосуванні, на кожній виборчій дільниці. Тоді, використовуючи дану таблицю, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,20\cdot x_1 + 0,25\cdot x_2 + 0,30\cdot x_3 = 2360 \\ 0,45\cdot x_1 + 0,50\cdot x_2 + 0,50\cdot x_3 = 4540 \\ 0,35\cdot x_1 + 0,25\cdot x_2 + 0,20\cdot x_3 = 2410. \end{cases}$$

Вирішимо поставлену задачу методом Гауса з використанням електронних таблиць *Calc* офісного пакета *OpenOffice.*

Розширена матриця системи має вид:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 0,20 & 0,25 & 0,30 & 2360 \\ 0,45 & 0,50 & 0,50 & 4540 \\ 0,35 & 0,25 & 0,20 & 2410 \end{array}\right\|$$

Позначимо рівняння (рядка) розширеної матриці як L_1, L_2 і L_3. Виконаємо прямій хід методу Гауса:

<u>Крок 1:</u> помножимо L_2 на множник $\dfrac{0,20}{0,45}$ і віднімемо з нього L_1. Ці операції еквівалентні операціям множення матриці на число й вирахування двох матриць, де замість матриць маємо справу з матрицями–рядками. Для виконання даних операцій у новий діапазон осередків копіюємо без зміни L_1, виділяємо за допомогою мишки порожній 2–ий рядок, у якому планується одержати результат; уводимо формулу; завершуємо обчислення натисканням Ctrl+Shift+Enter.

<u>Крок 2:</u> помножимо рівняння L_3 на множник $\dfrac{0,20}{0,35}$ і віднімемо з нього L_1. Виділяємо за допомогою мишки порожній 3–ій рядок, у якому планується одержати результат; уводимо формулу; завершуємо обчислення натисканням Ctrl+Shift+Enter.

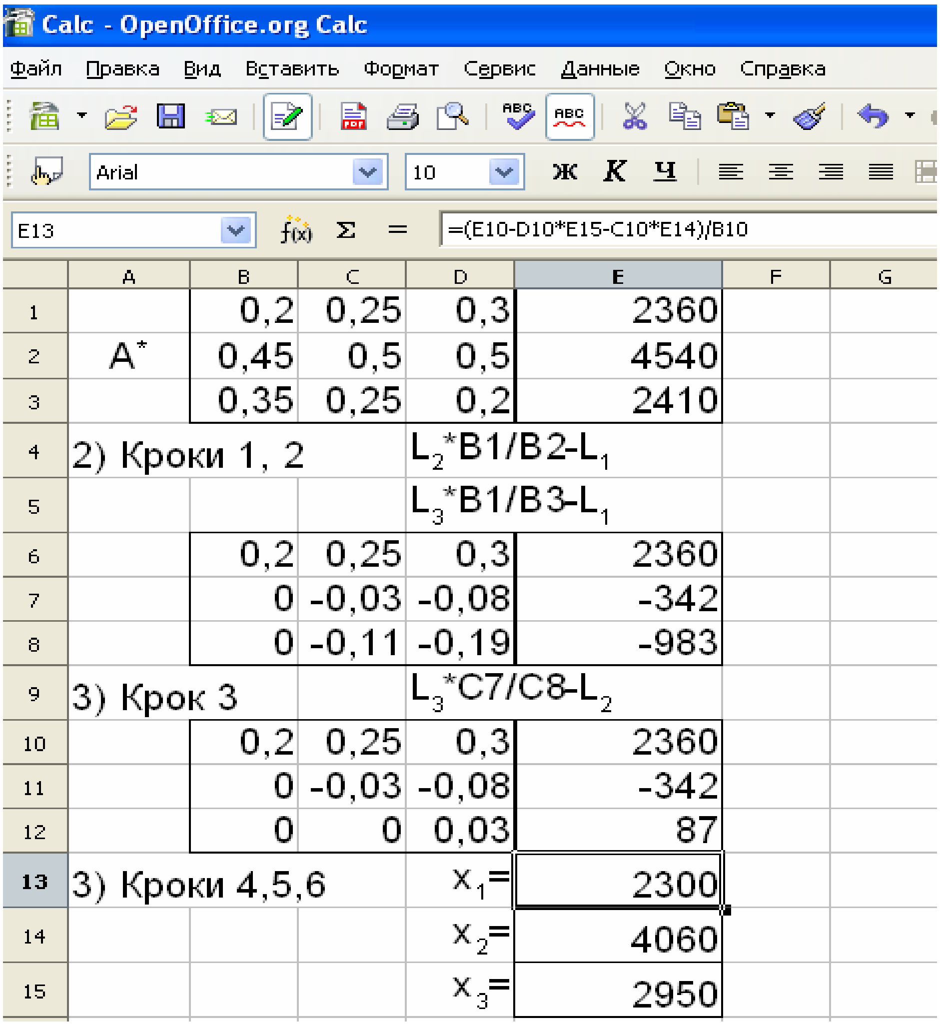
Одержали систему, у якій усі коефіцієнти при x_1 у всіх рівняннях, крім першого, звернулися в нуль (рис. 2.5).

Крок 3: помножимо L_3 на множник $\dfrac{0,03}{0,11}$ і віднімемо з нього L_2. У новий діапазон копіюємо без зміни L_1 і L_2, отримані на другому кроці, виділяємо за допомогою мишки порожній 3–ій рядок, у якому планується одержати результат; уводимо формулу; завершуємо обчислення натисканням Ctrl+Shift+Enter.

Одержимо систему трикутного вигляду, у третьому рівнянні якої всі коефіцієнти крім коефіцієнта при x_3 обернулися в нуль (рис. 2.5).

Робимо зворотний хід: знаходження змінних із системи.

Система має єдине рішення, яке виходить послідовним знаходженням змінних, починаючи з останнього рівняння. Для кроків 4, 5, 6 використовуємо формули 2.2. Отже, чисельність громадян, що брали участь у голосуванні, відповідно, на перший, другий та третій дільниці x_1=2300 чол., x_2=4060 чол., x_3=2950 чол.►



	A	B	C	D	E	F	G
1		0,2	0,25	0,3	2360		
2	A*	0,45	0,5	0,5	4540		
3		0,35	0,25	0,2	2410		
4	2) Кроки 1, 2			L_2*B1/B2-L_1			
5				L_3*B1/B3-L_1			
6		0,2	0,25	0,3	2360		
7		0	-0,03	-0,08	-342		
8		0	-0,11	-0,19	-983		
9	3) Крок 3			L_3*C7/C8-L_2			
10		0,2	0,25	0,3	2360		
11		0	-0,03	-0,08	-342		
12		0	0	0,03	87		
13	3) Кроки 4,5,6			x_1=	2300		
14				x_2=	4060		
15				x_3=	2950		

Рис. 2.5. Фрагмент виконання обчислень у *OpenOffice Calc*

Випадок 3

Якщо виходить система з трапеціїдальною матрицею коефіцієнтів (і при цьому вільний член рівняння теж дорівнює нулю), то система сумісна і невизначена. Розглянемо приведену систему з трьох невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Останнє рівняння системи обернулося у нуль, і система стала недовизначеною – два рівняння на три невідомих. Запишемо рішення системи у такий спосіб:

$$x_3 = C;$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}x_3\right) = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\cdot C\right);$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}\cdot C\right) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right) - a_{13}\cdot C\right).$$

Задаючи різні значення параметра C, ми одержимо різні рішення системи. Отже, рішень нескінченно багато. Оскільки рішення залежить від одного параметра, то розмірність рішення дорівнює 1. Розглянемо ранги основної матриці системи і розширеної матриці, вони, напевно, збігаються (рівні 2), але менше розмірності системи (кількості невідомих),

тобто rang A = rang $A^* < n$.

У загальному випадку, коли кількість змінних складає n, послідовність дій аналогічна. У лівій частині залишаємо невідомі з номерами, що відповідають першим ненульовим елементам у кожнім рядку, тобто $x_i, x_j, \ldots, x_p$. Помітимо, що p=rang A. Інші невідомі переносимо у праву частину. Вважаючи невідомі у правій частині деякими фіксованими величинами, нескладно виразити через них невідомі лівої частини.

Тепер, додаючи невідомим у правій частині довільні значення й обчислюючи значення змінних лівої частини, ми будемо знаходити різні рішення первинної системи $AX = B$. Щоб записати загальне рішення, потрібно невідомі у правій частині позначити у якому–небудь порядку буквами, $C_1, C_2, \ldots, C_{n-p}$, включаючи і ті невідомі, котрі явно не виписані у правій частині через нульові коефіцієнти, і тоді стовпець невідомих можна записати у вигляді стовпця, де кожен елемент буде лінійною комбінацією довільних величин $C_1, C_2, \ldots, C_{n-p}$ (зокрема, просто довільною величиною C_k). Цей запис і буде загальним рішенням системи.

Якщо система була однорідною, то одержимо загальне рішення однорідної системи. Коефіцієнти при C_1, узяті в кожнім елементі стовпця загального рішення, складуть перше рішення з фундаментальної системи рішень, коефіцієнти при C_2 – друге рішення і т.д.

Фундаментальну систему рішень однорідної системи можна одержати й іншим способом. Для цього одному змінному, перенесеному у праву частину, потрібно привласнити значення 1, а іншим – нулі. Обчисливши значення змінних у лівій частині, одержимо одне рішення з фундаментальної системи. Привласнивши іншому змінному у правій частині значення 1, а іншим – нулі, одержимо друге рішення з фундаментальної системи і т.д.

Може виникнути питання: «Навіщо розглядати випадок, коли деякі стовпці матриці A^* нульові? Адже у цьому випадку відповідні ним змінні у системі рівнянь у явному вигляді відсутні». Справа у тому, що у деяких задачах, наприклад, при знаходженні власних чисел матриці, такі системи виникають, і ігнорувати відсутні змінні не можна, тому що при цьому відбувається утрата важливих для задачі рішень.

Приклади

Приклад 1 Знайдіть загальне рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 2, \\ 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 13x_5 + 2x_6 = 14, \\ 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 6x_5 - x_6 = 18, \end{cases}$$

де невідомими є $x_1, \ldots, x_6$.

◀Випишемо розширену матрицю системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & -8 & 13 & 2 & 14 \\ 0 & 6 & 3 & -6 & 6 & -1 & 18 \end{array}\right).$$

Діючи за правилами, виконуємо прямій хід методу Гауса. Додамо до другого рядка перший, помножений на число $\left(-\frac{8}{2}\right)$, до третього рядка додамо перший, помножену на $\left(-\frac{6}{2}\right)$. У результаті одержимо:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -4 & 12 \end{array}\right).$$

Додамо до третього рядка другий, помножену на число $\left(-\frac{6}{3}\right)$. Одержимо:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямий хід методу Гауса закінчений. Розглянемо ранги основної матриці системи і розширеної матриці, вони, мабуть, збігаються (рівні 2), але менше розмірності системи (кількості невідомих n=6),

тобто $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* < n$.

Отже, рішень нескінченно багато.

Оскільки усяка фундаментальна система рішень складається з k рішень ($k = n$ – rang A=6–2=4), то розмірність рішення дорівнює 4.

Виписуємо по останній матриці систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 2, \\ \qquad\qquad\qquad -3x_5 - 2x_6 = 6. \end{cases}$$

В другому рівнянні у лівій частині залишаємо першу ненульову змінну x_5, а у першому рівнянні у лівій частині повинне залишитися кількість змінних рівних ранговi основної матриці p=rang A=2. Залишаємо у лівій частині першого рівняння дві змінні: першу ненульову x_2 і, уже визначену у другому рівнянні x_5. Інші невідомі x_1, x_3, x_4, x_6 переносимо у праву частину (невідоме x_1 реально у ній присутнім не буде, коефіцієнт перед ним дорівнює нулю). Одержуємо:

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_5 = 2 - x_3 + 2x_4 - x_6, \\ \qquad -3x_5 = 6 + 2x_6. \end{cases}$$

Вважаючи невідомі у правій частині деякими фіксованими величинами, нескладно виразити через них невідомі лівої частини.

Нехай, наприклад, $x_1 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_4 = C_3$, $x_6 = C_4$. Тоді одержимо:

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_5 = 2 - C_2 + 2C_3 - C_4, \\ \qquad -3x_5 = 6 + 2C_4. \end{cases}$$

З рівнянь знаходимо: $x_5 = -2 - \frac{2}{3}C_4$,

$$x_2 = -2x_5 + 1 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 - \frac{1}{2}C_4 = 4 + \frac{4}{3}C_4 + 1 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 - \frac{1}{2}C_4 = 5 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 + \frac{5}{6}C_4,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні числа.

Загальне рішення можна записати так:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 5 - C_2/2 + C_3 + 5C_4/6 \\ C_2 \\ C_3 \\ -2 - 2C_4/3 \\ C_4 \end{pmatrix}. ►$$

<u>Приклад 2</u> Знайдіть загальне рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$$

◄Запишемо розширену матрицю системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

До другого рядка додамо перший, помножену на (-2), до третього рядка додамо перший, помножену на (-4), до четвертого рядка додамо перший, помножену на (-5):

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right).$$

Другий рядок, помножений на (-1), додамо до третього:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right).$$

У третьому рядку всі елементи основної матриці дорівнюють нулеві, а вільний член не дорівнює нулеві. Виходить, система несумісна, рішень немає.

Відповідь: $X = \varnothing$.►

Приклад 3. Вирішити систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

◄Запишемо розширену матрицю системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Перший рядок, помножений на числа $\left(-\frac{3}{2}\right)$, (-1), (-2), додамо відповідно до другого, третього і четвертого рядків:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/2 & -11/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

До третього рядка додамо другий, помножений на $\left(-\frac{4}{7}\right)$. Одержимо:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/2 & -11/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 15/7 & -24/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

До четвертого рядка додамо третій, помножений на $\left(\frac{49}{15}\right)$:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/2 & -11/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 15/7 & -24/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & -61/5 & -14/15 \end{array}\right).$$

Виписуємо по останній матриці систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 = \frac{1}{2}, \\ \frac{15}{7}x_3 - \frac{24}{7}x_4 = \frac{-2}{7}, \\ \frac{-61}{5}x_4 = \frac{-14}{15}. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_2 - 11x_3 + 5x_4 = 1, \\ 15x_3 - 24x_4 = -2, \\ 183x_4 = 14. \end{cases}$$

Знаходимо послідовно значення невідомих:

$$x_4 = \frac{14}{183}, \qquad x_3 = \frac{24x_4 - 2}{15} = \frac{24\frac{14}{183} - 2}{15} = \frac{8 \cdot 14 - 122}{61 \cdot 15} = -\frac{2 \cdot 5}{183 \cdot 5} = -\frac{2}{183},$$

$$x_2 = \frac{-\frac{11 \cdot 2}{183} - \frac{5 \cdot 14}{183} + 1}{7} = \frac{-22 - 70 + 183}{183 \cdot 7} = \frac{91}{7 \cdot 183} = \frac{13}{183},$$

$$x_1 = \frac{1 + x_2 - 3x_3 + x_4}{2} = \frac{183 + 13 + 6 + 14}{183 \cdot 2} = \frac{216}{2 \cdot 183} = \frac{108}{183}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{183}\begin{pmatrix} 108 \\ 13 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}.$

Зауваження 3. Так само, як і при рішенні системи рівнянь за правилом Крамера, при використанні методу Гауса приходиться виконувати великий обсяг обчислювальної роботи. Через це цілком можливо, що буде допущена яка–небудь помилка в обчисленнях. Тому бажано після рішення системи виконати перевірку, тобто підставити отримані значення невідомих у рівняння системи. Для виконання повної перевірки підстановку потрібно зробити в усі рівняння системи. Якщо ж з якихось причин це не здійснено, то можна підставити знайдені значення в одне рівняння. На відміну від правила Крамера у методі Гауса цю підстановку потрібно робити в ОСТАННЄ рівняння ПЕРВИННОЇ системи. При наявності у цьому рівнянні всіх невідомих ця підстановка майже завжди покаже наявність помилки, якщо така була допущена.▶

Приклад 4 Знайдіть фундаментальну систему рішень і загальне рішення однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 10x_4 - 11x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + 8x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

◀Складаємо розширену матрицю системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 10 & -11 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 8 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Помножимо перший рядок послідовно на (–2), 5 і 1 і додамо відповідно до другого, третього і четвертого рядків. Одержимо матрицю:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 20 & -16 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 10 & -8 & 0 \end{array}\right).$$

Другий рядок помножимо послідовно на числа 4 і 2 і додамо відповідно до третього і четвертого рядків. Одержимо матрицю:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Прямий хід методу Гауса закінчений. В отриманої матриці легко визначити ранг rang A = rang A^*=2 та її базисний мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$. Згідно з теоремою число рішень у фундаментальній системі дорівнює різниці між числом невідомих n і рангом матриці. У нашому випадку фундаментальна система складається з трьох рішень: n–rang A = 5–2=3.

Переходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_2 + x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Невідомі x_1 і x_2 залишаємо у лівій частині, інші переносимо у праву частину:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 2x_4 + x_5, \\ \quad -3x_2 = -x_3 + 5x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Одержимо фундаментальну систему рішень однорідної системи способом, описаним вище. Для цього змінній x_3, перенесеній у праву частину, привласнимо значення 1, а іншим – нулі. Обчисливши значення змінних у лівій частині, одержимо одне рішення з фундаментальної системи. Привласнивши змінному x_4 у правій частині значення 1, а іншим – нулі, одержимо друге рішення з фундаментальної системи і т.д.

• Покладемо $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Одержимо з другого рівняння останньої системи: $x_2 = \frac{x_3 - 5x_4 + 4x_5}{3} = \frac{1 - 0 + 0}{3} = \frac{1}{3}$. З першого рівняння останньої системи: $x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -\frac{1}{3} + 1 - 0 + 0 = \frac{2}{3}$.

Перше рішення з фундаментальної системи: $X_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Покладемо $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$. Одержимо з другого рівняння останньої системи: $x_2 = \frac{x_3 - 5x_4 + 4x_5}{3} = \frac{0 - 5 + 0}{3} = -\frac{5}{3}$. З першого рівняння останньої системи: $x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = \frac{5}{3} + 0 - 2 + 0 = -\frac{1}{3}$.

Друге рішення з фундаментальної системи рішень: $X_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Покладемо $x_5 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Одержимо з другого рівняння останньої системи: $x_2 = \frac{x_3 - 5x_4 + 4x_5}{3} = \frac{0 - 0 + 4}{3} = \frac{4}{3}$. З першого рівняння останньої системи: $x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -\frac{4}{3} + 0 - 0 + 1 = -\frac{1}{3}$.

Третє рішення з фундаментальної системи рішень: $X_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Фундаментальна система рішень знайдена. Загальне рішення має вигляд:

$$X = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_3 + C_3 \cdot X_3$$

Відповідь: Фундаментальна система рішень:

$$X_1=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}-1/3\\-5/3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}-1/3\\4/3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Загальне рішення: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1/3\\-5/3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}-1/3\\4/3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$

Рішення помножені на будь–які ненульові числа знову утворювати фундаментальну систему. Тому у попередньому прикладі фундаментальну систему утворять і такі рішення:

$$X_1'=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\ X_2'=\begin{pmatrix}-1\\-5\\0\\3\\0\end{pmatrix},\ X_3'=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Загальне рішення можна записати так:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\-5\\0\\3\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}-1\\4\\0\\0\\3\end{pmatrix}.\blacktriangleright$$

2.21. Індивідуальне завдання № 2.6

Студент має розв’язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Знайти фундаментальну систему рішень лінійної системи рівнянь:

Вар.	**Завдання**	**Вар.**	**Завдання**
1.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c}3&1&-4&2&1\\2&-2&-3&-7&2\\1&11&0&34&-5\end{array}\right\Vert$	2.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c}7&2&-1&-2&2\\1&-3&1&-1&-1\\2&3&2&1&1\end{array}\right\Vert$

3.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 8 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -12 & -4 & 4 \end{array}\right\Vert$	4.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{array}\right\Vert$
5.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{array}\right\Vert$	6.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 5 & -2 & 9 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & 11 & -2 & -6 \end{array}\right\Vert$
7.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 12 & -1 & 7 & 11 & -5 \\ 24 & -2 & 14 & 22 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right\Vert$	8.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -1 \end{array}\right\Vert$
9.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 2 & 3 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & -6 & 6 & 7 \end{array}\right\Vert$	10.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$
11.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 8 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right\Vert$	12.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right\Vert$
13.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 7 & -14 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -10 & 1 & 5 & -13 \end{array}\right\Vert$	14.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right\Vert$
15.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right\Vert$	16.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 2 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right\Vert$
17.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & -3 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{array}\right\Vert$	18.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 2 & 1 & -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & -7 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right\Vert$
19.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & 0 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & -2 & -16 & 3 \end{array}\right\Vert$	20.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 1 & 11 & -12 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right\Vert$
21.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -16 & 3 \end{array}\right\Vert$	22.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 5 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right\Vert$
23.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right\Vert$	24.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right\Vert$
25.	$\left\Vert\begin{array}{ccc\|c} 3 & -5 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -9 \end{array}\right\Vert$	26.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right\Vert$
27.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 11 & -6 & 1 \end{array}\right\Vert$	28.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\Vert$
29.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{array}\right\Vert$	30.	$\left\Vert\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right\Vert$

31.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right\|$

2.22. Індивідуальне завдання № 2.7

Студент має розв’язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері у журналі групи.

Знайти фундаментальну систему рішень і частка рішення лінійної системи рівнянь:

Вар.	**Завдання**	**Вар.**	**Завдання**
1.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -4 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right\|$	2.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right\|$
3.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right\|$	4.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -5 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -9 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & -1 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right\|$
5.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right\|$	6.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right\|$
7.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right\|$	8.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right\|$
9.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right\|$	10.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -3 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right\|$
11.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right\|$	12.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right\|$
13.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & 4 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right\|$	14.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right\|$
15.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 8 & 9 & 1 \end{array}\right\|$	16.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right\|$
17.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right\|$	18.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 2 & -2 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -4 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & 3 & 5 \end{array}\right\|$
19.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -5 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -9 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right\|$	20.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right\|$

21.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right\|$	22.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right\|$
23.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right\|$	24.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right\|$
25.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right\|$	26.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right\|$
27.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right\|$	28.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right\|$
29.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right\|$	30.	$\left\|\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 4 & -2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & -4 & 3 & 3 \end{array}\right\|$
31.	$\left\|\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right\|$		

<u>Контрольні запитання</u>

1. За якими правилами виконуються операції над матрицями?
2. Які існують властивості визначників?
3. У чому полягає спосіб обчислення визначників розкладанням по рядках (стовпцях)?
4. Які існують властивості зворотної матриці?
5. Що таке ранг і лінійна залежність (незалежність) матриці?
6. У чому полягає рішення систем лінійних рівнянь методом Крамера і методом зворотної матриці?
7. У чому зміст теорем Кронеккера–Капеллі?
8. Як знаходиться загальне рішення однорідної системи лінійних рівнянь?
9. Як знаходиться загальне рішення неоднорідної системи лінійних рівнянь?
10. У чому полягає рішення систем лінійних рівнянь методом Гауса?

В розділі розглянуті основи матричного аналізу, структура і способи рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь