1. ЗАДАЧІ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

1.1. Тригонометрія

Приклад 1. Укажіть кількість і суму коренів даного рівняння в інтервалі $[0^0;360^0]$: $\sin^3(\pi - x) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^4\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos^4(x - \pi)$.

◄За формулами приведення приведемо усі функції до одного аргументу x: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^4 x - \cos^4 x$. За формулами скороченого множення розкладемо на множники:

$$a^3 + b^3 = \left(a + b\right) \cdot \left(a^2 - ab + b^2\right); \quad a^4 - b^4 = \left(a^2 - b^2\right) \cdot \left(a^2 + b^2\right).$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

По основній тригонометричній тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, і з огляду на формулу: $a^2 - b^2 = \left(a - b\right) \cdot \left(a + b\right)$ одержуємо рівняння:

$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$ або

$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0$

$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x - (\sin x - \cos x)) = 0$.

$(\sin x + \cos x)(1 + \cos x - \sin x \cos x - \sin x) = 0$

$(\sin x + \cos x)(1 + \cos x - \sin x \cdot \left(\cos x + 1\right) = 0$ і, нарешті,

$(\sin x + \cos x)(1 + \cos x)(1 - \sin x) = 0$

Розглянемо 3 випадки:

1) $\sin x + \cos x = 0$. Розділимо на $\cos x$. Тоді маємо рівняння: $\operatorname{tg} x = -1$. Отже, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. В інтервалі $[0^0;\ 360^0]$ маємо два рішення: $x_1 = \frac{3\pi}{4}$(при $k = 1$) і $x_2 = \frac{7\pi}{4}$(при $k = 2$).

2) $1 + \cos x = 0$, $\cos x = -1$. Отже, $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. В інтервалі $[0^0;\ 360^0]$ маємо одне рішення: $x_3 = \pi$.

3) $1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$. В інтервалі $[0^0;360^0]$ маємо одне рішення: $x_4 = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: В інтервалі $[0^0;360^0]$ усього чотири корені рівняння.

Сума коренів $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 4\pi$.►

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

◄Знайдемо область припустимих значень (ОПЗ): $x \in R$.

Застосовуючи формули зниження ступеня, приведемо це рівняння до більш простого виду:

$$\frac{1}{2}(1-\cos 4x)+\frac{1}{2}(1-\cos 6x)+\frac{1}{2}(1-\cos 8x)+\frac{1}{2}(1-\cos 10x)=2,$$

$$1-\cos 4x+1-\cos 6x+1-\cos 8x+1-\cos 10x=4,$$

$$\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x+\cos 10x=0.$$

Звідси, використовуючи формулу перетворення суми косинусів у добуток, одержуємо:

$$2\cos\frac{4x+6x}{2}\cdot\cos\frac{4x-6x}{2}+2\cos\frac{8x+10x}{2}\cdot\cos\frac{8x-10x}{2}=0,$$

$2\cos 5x\cos x+2\cos 9x\cos x=0$ або $\cos x(\cos 5x+\cos 9x)=0$.

Розглянемо 2 випадки:

1) $\cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$;

2) $\cos 5x+\cos 9x=0$, отже, використовуючи знову формулу перетворення суми косинусів у добуток, маємо:

$$\cos\frac{5x+9x}{2}\cdot\cos\frac{5x-9x}{2}=0 \Rightarrow \quad \cos 7x\cdot\cos 2x=0 \Rightarrow$$

2а) $\cos 7x=0 \Rightarrow 7x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi k}{7}$

2б) $\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$.

Таким чином, з огляду на ОПЗ, одержуємо:

Відповідь: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi k}{7},\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in \mathrm{Z}$.►

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $10\cos 2x+8=tgx$.

◄Знайдемо ОПЗ: $\cos x\neq 0$.

Уведемо нову перемінну, поклавши $t=tgx$.

Оскільки $\cos 2x=\dfrac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, то рівняння прийме вид:

$$10\frac{1-t^2}{1+t^2}+8=t \qquad \text{або} \qquad 10\cdot\left(1-t^2\right)+8\left(1+t^2\right)=t\cdot\left(1+t^2\right)$$

$$10-10t^2+8+8t^2-t-t^3=0 \Rightarrow \qquad t^3+2t^2+t-18=0.$$

Розкладемо дане рівняння в такий спосіб:

$$t^3-2t^2+4t^2-8t+9t-18=0$$

$$t^2(t-2)+4t(t-2)+9\left(t-2\right)=0 \Rightarrow (t-2)(t^2+4t+9)=0.$$

Квадратний тричлен у другій дужці не має дійсних коренів. Отже, рівняння має тільки одне рішення. Знайдемо корені вихідного рівняння:

$tgx=2 \Rightarrow x=arctg2+\pi k,\ k\in \mathrm{Z}$.

Додатковий випадок розглядати не треба, тому що $\cos x\neq 0$.

Відповідь: $x=arctg2+\pi k,\ k\in \mathrm{Z}$.►

<u>Приклад 4.</u> Розв'язати рівняння: $tgx - \sin x = 1 - tgx \cdot \sin x$.

◀Знайдемо ОПЗ: $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Перетворимо рівняння в такий спосіб:

$tgx + tgx \cdot \sin x = 1 + \sin x$

$tgx(1 + \sin x) = 1 + \sin x$

$(1+\sin x)tgx - (1+\sin x) = 0 \Rightarrow (1+\sin x)(tgx - 1) = 0$.

Розглянемо 2 випадки:

1) $(1+\sin x = 0) \Rightarrow (\sin x = -1) \Rightarrow (x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$; у цьому випадку вихідне рівняння рішень не має, тому що дані значення не входять в ОПЗ;

2) $(tgx - 1 = 0) \Rightarrow (tgx = 1) \Rightarrow (x = \frac{\pi}{4} + \pi k)$; ці значення входять в ОПЗ рівняння.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.▶

1.2 Індивідуальне завдання № 1.1

Студент повинен розв'язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері в журналі групи.

Обчислити значення виразу:

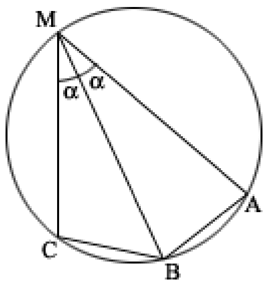
1.	Результат обчислення виразу $\frac{tg55^\circ - tg35^\circ}{tg20^\circ}$ дорівнює
2.	Результат обчислення виразу $\cos\left(arctg 2\sqrt{6}\right)$ дорівнює
3.	Результат обчислення виразу $\frac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + \sqrt{2}\sin 44^\circ}$ дорівнює
4.	Результат обчислення виразу $\cos\left(\arcsin 1 + \arccos\frac{3}{5}\right)$ дорівнює
5.	Результат обчислення виразу $\frac{10\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$ дорівнює
6.	Результат обчислення виразу $tg\left(arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3}\right)$ дорівнює
7.	Результат обчислення виразу $tg\frac{\pi}{12} + ctg\frac{\pi}{12}$ дорівнює
8.	Результат обчислення виразу $\cos\left(arcctg\left(-4\sqrt{3}\right)\right)$ дорівнює

9.	Якщо $\alpha-\beta=90^\circ$, то значення виразу $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$ дорівнює
10.	Якщо $\sin 4\alpha=0,4$, то значення виразу $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$ дорівнює
11.	Вкажіть у градусах суму коренів рівняння $4\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=4-\cos^2(\pi-3x)$, що належать проміжкові $\left[-90^\circ;270^\circ\right]$
12.	Вкажіть у градусах суму коренів рівняння $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{2}$, що належать проміжкові $\left[-270^\circ;90^\circ\right]$
13.	Розв’язати рівняння $3\cdot\sin^2 2x+7\cdot\cos 2x-3=0$
14.	Укажіть кількість коренів рівняння $2tg^2x+3=\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, що належать проміжкові $\left[0^\circ;360^\circ\right]$
15.	Укажіть кількість коренів рівняння $1+ctgx=\cos x+\frac{1}{\sin x}$, що належать проміжкові $\left[0^\circ;360^\circ\right]$
16.	Вкажіть у градусах суму коренів рівняння $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$, що належать проміжкові $\left[0^\circ;180^\circ\right]$
17.	Чому дорівнює $9\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=-\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$?
18.	$\arcsin\left(\cos\frac{9\pi}{5}\right)$ дорівнює
19.	$\arccos\left(\sin\frac{12\pi}{5}\right)$ дорівнює
20.	Розв’язати рівняння $\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 8x={}^1\!/_4\sin 12x$
21.	Розв’язати рівняння $\sin\left(15^\circ+x\right)+\sin\left(45^\circ-x\right)=1$
22.	Розв’язати рівняння $\sin 3x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
23.	Розв’язати рівняння $\cos 4x+2\sin^2 x=0$
24.	Розв’язати рівняння $tgx+tg2x+tg3x=0$

25.	Розв'язати рівняння $\cos\left(20^\circ + x\right) + \cos\left(100^\circ - x\right) = \frac{1}{2}$
26.	Розв'язати рівняння $\sin 9x = 2\sin 3x$
27.	Довести, що: $tg20^\circ \cdot tg40^\circ \cdot tg80^\circ = \sqrt{3}$
28.	Розв'язати рівняння $\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{4}$
29.	Розв'язати рівняння $ctg^2 x = \frac{1+\sin x}{1+\cos x}$
30.	Обчислити $\arcsin(\cos\frac{33}{5}\pi)$
31.	Укажіть кількість коренів рівняння $1 + ctgx = \cos x + \frac{1}{\sin x}$

1.3. Планіметрія

<u>Приклад 5.</u> Розв'язати задачу: В окружності проведені 3 хорди: AM = 6 см, MB = 4 см, MC = 1 см. Хорда MB поділяє уписаний кут AMC навпіл. Знайти радіус цієї окружності.



◄Нехай кут $AMB = \alpha$. За теоремою косинусів із трикутника AMB маємо:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot BM\cos\alpha = 52 - 48\cos\alpha.$$

Аналогічно з трикутника BMC маємо:

$$BC^2 = BM^2 + MC^2 - 2BM \cdot MC\cos\alpha = 17 - 8\cos\alpha.$$

Відрізки AB і BC рівні як хорди, що стягають рівні дуги, тому віднімемо з першого рівняння друге й одержимо:

$$0 = 35 - 40\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}.$$ Виходить,

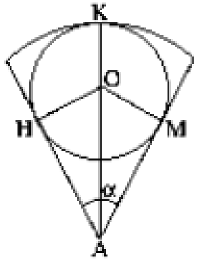
$$AB^2 = 52 - 48\cos\alpha = 52 - 48\cdot\frac{7}{8} = 52 - 42 = 10, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Трикутник AMB уписаний в окружність, отже, радіус даної окружності можна знайти за допомогою теореми синусів:

$$2R = \frac{AB}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{10}{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}}$$

$$R = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{10}{\frac{64-49}{64}}} = \sqrt{\frac{10\cdot 64}{15\cdot 4}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 4\cdot 16}{3\cdot 5\cdot 4}} = \frac{32}{3}$$ Відповідь: $R = \sqrt{\frac{32}{3}}$.►

<u>Приклад 6.</u> Розв’язати задачу: У сектор радіуса R з центральним кутом α уписане коло. Знайти його радіус.



Дано: $AB = AC = R$, кут $BAC = \alpha$.
Знайти: $OH = r$.

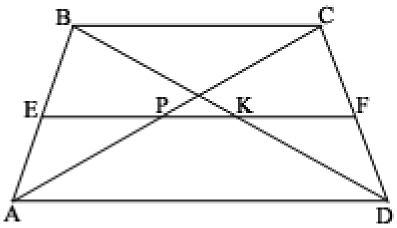
◄Оскільки центри окружностей і точки торкання лежать на одній прямій, те $AO = R - r$. Розглянемо трикутник AOH (він прямокутний, тому що кут $OHA = 90^0$): кут $HAO = \dfrac{\alpha}{2}$ з рівності трикутників AOH і AOM (тому що *BIH=OM=r, AH=AM* як відрізки дотичних, проведених з однієї точки, сторона *AT* – загальна). Оскільки: *Синус кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню катета, що лежить проти гіпотенузи*, маємо:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OH}{AO} = \frac{r}{R-r} \Rightarrow (\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(R-r) = r) \Rightarrow (R\cdot\sin\frac{\alpha}{2} - r\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = r) \Rightarrow$$

$$(R\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = r\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + r)$$

Відповідь: $r = \dfrac{R\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.►

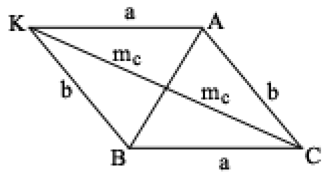
<u>Приклад 7.</u> Розв’язати задачу: Підстави трапеції 5 дм і 40 см. Знайти довжину відрізка, що з'єднує середини діагоналей.



◄Нехай *ABCD* – трапеція, точка *P* – середина діагоналі *AC*, точка *К* – середина діагоналі *BD*.

Неважко помітити, що точки *P* и *К* лежать на середній лінії *EF* трапеції. Тому що *ЕК* – середня лінія трикутника *ABD, а середня лінія трикутника – це пряма, що з'єднує середини двох сторін трикутника, рівнобіжна третій стороні і дорівнює її половині,* тому $EK = \dfrac{50}{2}\text{ см} = 25\text{ см}$. Аналогічно, $EP = \dfrac{40}{2}\text{ см} = 20\text{ см}$, оскільки є середньою лінією трикутника *ABC*. Отже, $PK = EK - EP = 25 - 20 = 5\text{ см}$. Відповідь: 5 см. ►

<u>Приклад 8.</u> Розв’язати задачу: Дані 2 сторони трикутника *a*, *b* і медіана m_c, проведена до сторони *c*. Знайти сторону *c*.



◀Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ACBK$. При цьому $KC = 2 \cdot m_c$. По властивості паралелограма сума квадратів його діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін. Тому з рівності $4m_c^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2$ одержуємо:

$$c^2 = 2b^2 + 2a^2 - 4m_c$$

Відповідь: $c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m_c^2}$.▶

1.4. Індивідуальне завдання № 1.2

Студент повинен розв'язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері в журналі групи.

Знайти необхідну величину:

1.	Якщо в трикутнику ABC задані $AC = 4$, $BC = 5$, $\cos A = \frac{2}{9}$, то синус кута B дорівнює
2.	Якщо довжини діагоналей ромба відносяться як 1:2, а площа ромба дорівнює 12, то довжина сторони ромба дорівнює
3.	Якщо в окружність уписаний правильний трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$, і в трикутник уписана окружність, то площа кільця дорівнює
4.	Якщо в трикутнику ABC кут при вершині C дорівнює 135°, $AC = 6$, висота $BD = 2$, то площа трикутника ABD дорівнює
5.	Якщо в трикутнику ABC задані $AC = 4$, $BC = 7$, $AB = 5$, то синус кута A дорівнює
6.	Якщо в трикутнику ABC задані $BC = 9$, $\cos C = \frac{3}{7}$, $\sin A = \frac{2}{3}$, то довжина сторони AB дорівнює
7.	Якщо в окружності радіуса $3\sqrt{27}$ проведена хорда, що стягає дугу в 60°, то відстань від центра окружності до даної хорди дорівнює
8.	Якщо одна з діагоналей паралелограма, довжина якої дорівнює $4\sqrt{6}$, складає з підставою кут 60°, а друга діагональ складає з тією же підставою кут 45°, то довжина другої діагоналі дорівнює
9.	Якщо в колі, площа якого дорівнює 6, 25π, проведена хорда довжиною 3, то відстань від центра кола до хорди дорівнює
10.	Якщо в прямокутному трикутнику довжина гіпотенузи дорівнює 20, а радіус уписаної окружності – 4, то сума довжин катетів трикутника дорівнює

11.	Якщо площа ромба дорівнює 18, а гострий кут 30°, то довжина сторони ромба дорівнює
12.	У прямокутному трикутнику ABC з катетом $AC = 7$ і медіаною $CM = 7$, проведеної до гіпотенузи AB, відстань між точкою M і основою H висоти CH дорівнює
13.	Відрізок довжини 5, що з'єднує бічні сторони рівнобічної трапеції і рівнобіжний її основам, рівним 2 і 7, поділяє площу трапеції у відношенні
14.	У коло радіуса 10 уписаний рівнобедрений трикутник з кутом в. 120° Знайти його периметр.
15.	O_1 і O_2 – центри кіл радіуса 6, $O_1O_2 = 6\sqrt{2}$. Тоді площа загальної частини цих кіл дорівнює
16.	Якщо в рівнобічної трапеції висота дорівнює 14, основи рівні 12 і 16, то площа кругу, описаного біля трапеції, дорівнює
17.	У прямокутний трикутник з катетами ***a*** і ***b*** уписаний квадрат, що має з трикутником загальний прямий кут. Знайти периметр квадрата
18.	Біля окружності з діаметром 15 см описана рівнобедрена трапеція з бічною стороною, рівної 17 см. Знайти основи трапеції
19.	До окружності, уписаної в рівнобедрений трикутник з підставою 12 см і висотою 8 см, проведена дотичній, рівнобіжна основі. Знайти довжину відрізка цієї дотичної, ув'язненого між сторонами трикутника
20.	Знайти довжини сторін ***AB*** і ***AC*** трикутника ***ABC***, якщо ***BC*** =8 см, а довжини висот, проведених на ***AC*** і ***BC***, рівні відповідно 6,4 і 4 см.
21.	Один з кутів трапеції дорівнює 30^0, а прямі, що містять бічні сторони трапеції, перетинаються під прямим кутом. Знайти довжину меншої бічної сторони трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см, а одне з основ – 8 см.
22.	Площа прямокутного трикутника дорівнює $2\sqrt{3}$ см^2. Визначити його висоту, проведену до гіпотенузи, якщо вона поділяє прямий кут у співвідношенні 1:2
23.	Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, площа його дорівнює 24 см^2. Знайти площу описаного кола.
24.	Площа кругового кільця дорівнює ***S***. Радіус більшої окружності дорівнює довжині меншої окружності. Визначити радіус останньої.
25.	Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а радіус окружності, уписаної в трикутник дорівнює 3 см. Знайти площу трикутника.
26.	Довжини сторін прямокутного трикутника утворять арифметичну прогресію з різницею 1 см. Знайти довжину гіпотенузи.
27.	У трикутнику ***ABC*** кут ***A*** вдвічі більше кута ***B***. За даними сторонам ***b*** і

	c знайти ***a***.
28.	Катети прямокутного трикутника рівні ***b*** і ***c.*** Знайти довжину бісектриси прямого кута.
29.	В окружність радіуса 3 см уписана рівнобедрена трапеція з кутом при підставі $\pi/4$ і висотою $\sqrt{2}$ см. Знайти площу трапеції.
30.	Знайти площу ромба ***ABCD***, якщо радіуси окружностей, описаних біля трикутників ***ABC*** і ***ABD***, відповідно ***R*** і ***r.***.
31.	Відстань між центрами двох пересічних кіл радіусів ***R*** і ***r*** дорівнює ***d***. Знайти площу їхньої загальної частини.

1.5. Алгебраїчні нерівності і рівняння

Методом інтервалів вирішуються раціональні або дрібно–раціональні нерівності (тобто нерівності типу $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, де $P(x)$ і $P(x)$– багаточлени або зводяться до них).

Рішення цих нерівностей ґрунтується на наступному твердженні. Якщо $x_1,\ldots,x_n$ – усі корені багаточленів $P(x)$ і $P(x)$, розташовані в порядку зростання, то вираз $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (або $P(x)\cdot Q(x)$) не змінює знака на кожнім з інтервалів $(-\infty,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},x_n),(x_n,+\infty)$.

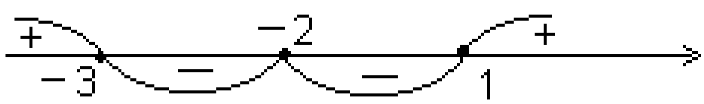
Це означає, що коли треба довідатися знак виразу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на одному з цих інтервалів, то досить узяти будь–яку точку з цього інтервалу і подивитися значення виразу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в цій точці.

Приклад 9. Розв’язати нерівність $f(x)=\frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+3)} \geq 0$.

◄Відзначимо корені чисельника і знаменника $x_1=-3, x_2=-2, x_3=1$. Вираз $f(x)$ має різні знаки на інтервалах $(-\infty,-3),(-3,-2),(-2,1),(1,+\infty)$. Візьмемо будь–яку точку з інтервалу $(-\infty,-3)$ наприклад $x=-4$, і подивимося, чому дорівнює $f(-4)$:

$$f(-4)=\frac{(-4-1)\cdot(-4+2)^2}{(-4+3)}=\frac{-5\cdot 4}{-1}=20>0.$$

Звідси випливає, що $f(x)>0$ при усіх $x\in(-\infty,-3)$.



При переході через точку (–3) перемінить знак тільки дужка, яка стоїть у знаменнику, а знак інших дужок залишається без зміни. Отже, $f\left(x\right)$ поміняє знак і $f\left(x\right)<0$ при усіх $x\in\left(-3,-2\right)$. При переході через точку (–2) $f\left(x\right)$ не змінить знака, тому що дужка (x+2) у парній степені, і, отже, $(x+2)^2$ негативною бути не може. При переході через точку (+1) $f\left(x\right)$ знову поміняє знак. Тепер можна записувати відповідь. Але треба бути уважним! За звичай значення x=–2 утрачають.

Відповідь: $\left(-\infty,-3\right)\cup\left\{-2\right\}\cup\left[1,+\infty\right)$.►

<u>Приклад 10.</u> Розв’язати нерівність $\dfrac{2}{3x+2}<\dfrac{3}{2x+5}-3$.

◄Найпоширеніша помилка – множення на знаменник. Треба пам'ятати, що при множенні нерівності на негативне число знак нерівності змінюється.

Перенесемо вираз, що знаходиться в правій частині нерівності, у ліву частину і приведемо до загального знаменника.

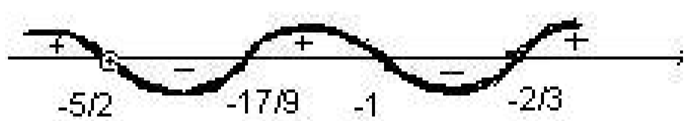
$$\frac{2\left(2x+5\right)-3\left(3x+2\right)+3\left(3x+2\right)\left(2x+5\right)}{\left(3x+2\right)\left(2x+5\right)}<0$$

$$\left\{\frac{18x^2+52x+34}{\left(3x+2\right)\left(2x+5\right)}<0\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{18\left(x+1\right)\left(x+{}^{17}\!/_{19}\right)}{\left(3x+2\right)\left(2x+5\right)}<0\right\}$$

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a(x-x_{11})(x-x_2)=18(x+1)(x+{}^{17}\!/_{9})$$

$$x_{1,2}=\frac{-52\pm\sqrt{52^2-4\cdot18\cdot34}}{2\cdot18}=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-9\cdot17}}{9}=\frac{-13\pm4}{9}$$

$$x_1=-{}^{17}\!/_{9};\ x_2=-1$$



Розставляючи знаки як у попередньому прикладі, одержуємо відповідь:

Відповідь: $x\in\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{17}{9}\right)\cup\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$.►

<u>Приклад 11.</u> Розв’язати рівняння: $\left|3-x\right|-\left|x+2\right|=5$.

◄1 спосіб розв’язання

Розглянемо 4 можливих випадки:

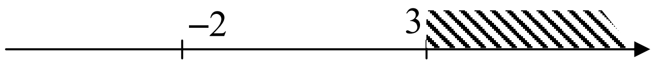
1) $\begin{cases} 3-x\ge 0 \\ x+2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x\ge -2 \end{cases} \Rightarrow -2\le x\le 3$ (ОПЗ)

У цьому випадку одержуємо рівняння $3-x-(x+2)=5 \Rightarrow x=-2$. Це значення задовольняє ОПЗ, тому є коренем даного рівняння.

2) $\begin{cases} 3-x\ge 0 \\ x+2< 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x< -2 \end{cases} \Rightarrow x<-2.$ (ОПЗ)

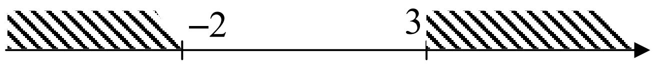
У цьому випадку одержуємо рівняння $3-x+x+2=5 \Rightarrow 5=5$. Тут $x\in(-\infty,+\infty)$, але з огляду на ОПЗ $x<-2$ Рішення: $x\in(-\infty,-2)$

3) $\begin{cases} 3-x< 0 \\ x+2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x> 3 \\ x\ge -2 \end{cases} \Rightarrow x\ge 3.$ (ОПЗ)



У цьому випадку одержуємо рівняння $x-3-(x+2)=5 \Rightarrow -5=5$. Рішень немає.

4) $\begin{cases} 3-x< 0 \\ x+2< 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x> 3 \\ x< -2 \end{cases}$



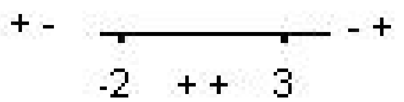
– цей випадок не можливий, тому що ОПЗ повинна бути безперервної.

Поєднуючи знайдені рішення, одержуємо:

Відповідь: $x\le -2$.

2 спосіб розв'язання

Цю задачу можна вирішувати використовуючи метод інтервалів: Відзначимо корені при яких вирази з модулем обертаються в нуль x_1=–2; x_2=3.



Виберемо з інтервалу (–∞,–2] будь–яку точку, наприклад –4, і подивимося, який знак прийме вираз з модулем при x=–4:

$3-x=3-(-4)=3+4=7>0$ "+" Для першої модульної дужки

$x+2=-4+2=-2<0$ "–" . Для другої модульної дужки

Значить на інтервалі (–∞,–2] при рішенні рівняння потрібно першу модульну дужку відкривати зі знаком «+», а другу зі знаком «–».

Тобто $3-x-(-(x+2))=5 \Rightarrow 3-x+x+2=5 \Rightarrow 5=5$.

Тут $x\in(-\infty,+\infty)$, але з огляду на ОПЗ $x\le -2$. Рішення: $x\in(-\infty,-2]$.

Аналогічно знаходимо знаки для інтервалу $x \in (-2,+3)$. Відзначимо ці знаки «+» і «+». Тобто $3 - x - x - 2 = 5 \Rightarrow x = -2$. Значення $x = -2$ не входить в ОПЗ, тому немає рішень.

Аналогічно знаходимо знаки для інтервалу $x \in [+3,+\infty)$. Відзначимо ці знаки «–» і «+». Тобто $-3 + x - x - 2 = 5 \Rightarrow -5 = 5$. Немає рішень.

Відповідь: $x \in (-\infty,-2]$.►

<u>Приклад 12.</u> Розв'язати рівняння: $\sqrt{x+2} - x + 1 = 0$.

◄Знайдемо ОПЗ: $x \geq -2$.

Залишаємо корінь у лівій частині рівняння, а всі інші доданки переносимо в праву: $\sqrt{x+2} = x - 1$.

Потім зводимо в квадрат: $x + 2 = (x-1)^2$,

Оскільки $\sqrt{x+2} \geq 0$, то для коректності зведення в квадрат необхідно, щоб $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Т.ч. змінюємо ОПЗ: $x \geq 1$.

Одержимо рівняння $x^2 - 3x - 1 = 0$.

Знайдемо його корені: $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 1}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}\left(3 - \sqrt{13}\right)$, $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(3 + \sqrt{13}\right)$.

Обидва корені задовольняють ОПЗ, але тільки один $x = \dfrac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ задовольняє додатковому обмеженню $x \geq 1$.

Відповідь: $x = \dfrac{1}{2}\left(3 + \sqrt{13}\right)$.►

<u>Приклад 13.</u> Розв'язати рівняння: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x+2} = -1$.

◄Знайдемо ОПЗ: $x \geq -2$.

Переносимо другий вираз, що містить радикал, у праву частину рівняння, а (–1) переносимо в ліву:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 1 = \sqrt{x+2}.$$

Підкореневий вираз представимо у виді добутку, для цього знайдемо його корені: $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = 3$

$\sqrt{(x-3)^2} + 1 = \sqrt{x+2}$.

У цьому місці звичайно допускається типова помилка:

Правильно	Неправильно
$\sqrt{(x-3)^2} = \lvert x-3 \rvert$	$\sqrt{(x-3)^2} = x - 3$

Необхідно завжди пам'ятати про модульну дужку при розкритті подібних виразів, у противному випадку будуть загублені корені рівняння.

Таким чином, одержуємо вираз:

$|x-3|+1=\sqrt{x+2}$

Розглянемо два випадки:

1) $x-3\geq 0 \Rightarrow \quad x\geq 3$ (ОПЗ)

Розкриваємо модульну дужку зі знаком "+":

$x-3+1=\sqrt{x+2} \Rightarrow \quad x-2=\sqrt{x+2}$

Зводимо в квадрат обидві частини рівняння:

$$(x-2)^2=x+2,$$

Тому що $\sqrt{x+2}\geq 0$, то для коректності зведення в квадрат необхідно, щоб $x-2\geq 0 \Rightarrow \quad x\geq 2$. Це додаткове обмеження не змінює ОПЗ .

Розкриємо квадратні дужки і перенесемо всі доданки з лівої частини рівняння в праву. Одержимо рівняння $x^2-5x+2=0$.

$x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$. Тільки один корінь $x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ задовольняє ОПЗ $x\geq 3$.

2) $x-3<0 \Rightarrow \quad x<3$ (ОПЗ)

Розкриваємо модульну дужку зі знаком "–":

$3-x+1=\sqrt{x+2} \Rightarrow \quad 4-x=\sqrt{x+2}$

Зводимо в квадрат обидві частини рівняння:

$$(4-x)^2=x+2,$$

так як $\sqrt{x+2}\geq 0$, то для коректності зведення в квадрат необхідно, щоб $4-x\geq 0 \Rightarrow \quad x\leq 4$. Це додаткове обмеження не змінює ОПЗ .

Розкриємо квадратні дужки і перенесемо всі доданки з лівої частини рівняння в праву. Одержимо рівняння $x^2-9x+14=0$.

$x_1=\dfrac{9+\sqrt{25}}{2}=7$, $x_2=\dfrac{9-\sqrt{25}}{2}=2$. Тільки один корінь $x_2=\dfrac{9-\sqrt{25}}{2}=2$ задовольняє ОПЗ $x<3$. Поєднуємо отримані рішення.

Відповідь: $x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}, \quad x_2=2$.►

<u>Приклад 14.</u> Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{2}{3} \\ xy=9 \end{cases}$.

◄Знайдемо ОПЗ: $x>0,\ y>0$.

З другого рівняння знаходимо $x=\dfrac{9}{y}$ або $\sqrt{x}=\sqrt{\dfrac{9}{y}}=\dfrac{3}{\sqrt{y}}$ і підставляємо в перше: $\left\{\dfrac{\sqrt{y}}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{2}{3}\right\} \Rightarrow \left\{\dfrac{\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}-3-2\cdot\sqrt{y}}{3\cdot\sqrt{y}}=0\right\} \Rightarrow \left\{y-2\sqrt{y}-3=0\right\}.$

Робимо заміну перемінної: $t=\sqrt{y}\quad (t>0)$. Одержуємо квадратне рівняння відносно *t*: $\quad t^2-2t-3=0$.

Одержимо корені: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{\dfrac{4}{4}+3}=1\pm 2$

$t_1=-1,\ t_2=3$. Але відповідно до заміни $t=-1$ не підходить.

Тому $\sqrt{y}=3$. Звідси $y=9,\ x=1$. Відповідь: (1; 9) .►

1.6. Індивідуальне завдання № 1.3

Студент повинен розв'язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері в журналі групи.

Спростити вираз:

1.	Результат спрощення виразу $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}\cdot\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a+b+\sqrt{ab}}$ має вигляд
2.	Результат спрощення виразу $\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$ має вигляд
3.	Результат скорочення дробу $\dfrac{x^3+5x^2-14x}{x^2+6x-7}$ має вигляд
4.	Результат спрощення виразу $\dfrac{a^{5/4}-a^{1/4}}{a^{3/4}+a^{1/2}}:\dfrac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}+a^{1/4}}+1$ має вигляд
5.	Результат спрощення виразу $\dfrac{\sqrt{\left(abc+4\right):a+4\sqrt{b\cdot c:a}}}{\sqrt{abc}+2}:a^{-1/2}$ має вигляд
6.	Результат спрощення виразу $\dfrac{x^2+yx-6y^2}{x^2-yx-2y^2}$ має вигляд
7.	Результат спрощення виразу $2\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{9x^5}-4x}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3x^2}}$ має вигляд
8.	Результат спрощення виразу $\left(\dfrac{m-n}{m^2+mn}+\dfrac{n-m}{m^2-n^2}\right)\cdot(m+n)$ має вигляд
9.	Результат обчислення $\dfrac{3x-2\sqrt[3]{2y^2}}{\sqrt{3x}+\sqrt[3]{4y}}+\sqrt[3]{4y}$ має вигляд

10.	Результат спрощення виразу $\dfrac{8x^{-3}+8x^{-2}+2x^{-1}}{0,\ 25x^2+x+1}$ має вигляд
11.	Різниця між найбільшим і найменшим коренями рівняння $\dfrac{8}{x^2-8}+\dfrac{7}{x^2-7}=-2$ дорівнює
12.	Сума коренів рівняння $\lvert x+1\rvert=2\lvert x-2\rvert$ дорівнює
13.	Середнє арифметичне всіх дійсних коренів рівняння $(x-3)(x-1)^3+(3-x)(x-2)^3=7(x-3)$ дорівнює
14.	Сума коренів рівняння $(x-2)^2(x+1)=(1,5x-3)(x^2-4)$ дорівнює
15.	Сума коренів рівняння $x^2-2x=\lvert x-1\rvert$ дорівнює
16.	Сума кубів дійсних коренів рівняння $\dfrac{1}{x^3+4}-\dfrac{1}{x^3+5}=\dfrac{1}{56}$
17.	Якщо x_0 – корінь рівняння $\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{2x-7}=x-2$, то значення виразу $\dfrac{3x_0}{x_0^2+8}$ дорівнює
18.	Різниця між найбільшим і найменшим коренями рівняння $x^2+\lvert x\rvert=\dfrac{5}{4}$ дорівнює
19.	Добуток коренів рівняння $2(x^2+5)-\dfrac{9}{x^2+5}=17$ дорівнює
20.	Середнє арифметичне всіх дійсних коренів рівняння $\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x+0,5)^2}=5\dfrac{1}{3}$ дорівнює
21.	Звільниться від ірраціональності в знаменнику (ірраціональність у чисельнику допускається) $\dfrac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$
22.	Звільніться від ірраціональності в знаменнику (ірраціональність у чисельнику допускається) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$
23.	Чому дорівнює сума виразів $\sqrt{24-t^2}$ і $\sqrt{8-t^2}$, якщо відомо, що їхня різниця дорівнює 2 (значення перемінної ***t*** знаходити не потрібно)
24.	Результат спрощення виразу $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}\div\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$ має вигляд

25.	Результат спрощення виразу $\frac{x-1}{x+x^{1/2}+1} \div \frac{x^{1/2}+1}{x^{3/2}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$ має вигляд
26.	Результат спрощення виразу $(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}})\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$ має вигляд
27.	Результат спрощення виразу $\frac{a^{5/4}-a^{1/4}}{a^{3/4}+a^{1/2}}:\frac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}+a^{1/4}}+1$ має вигляд.
28.	Різниця між найбільшим і найменшим коренями рівняння $\frac{8}{x^2-8}+\frac{7}{x^2-7}=-2$ дорівнює.
29.	Розв'язати рівняння: $\frac{2x}{x-1}-\frac{3x+1}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}=0.$
30.	Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} x^2+6x+5\ge 0 \\ x^2-25\le 0 \\ 2x+11>0. \end{cases}$
31.	Розв'язати нерівність $\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^3-1\right)}{x^2-2x-3}>0$

1.7. Логарифмічні нерівності

<u>Приклад 15.</u> Розв'язати нерівність: $0,4^{\log_2^2 x+1}<6,25^{2-\log_2 x^3}$.

◀Помітивши, що $0,4=\frac{2}{5}$ і $6,25=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, приведемо обидві частки нерівності до однієї підстави:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2^2 x+1}<\left(\frac{2}{5}\right)^{-4+2\cdot\log_2 x^3}$$

Оскільки підстава ступеня $0<\frac{2}{5}<1$, то змінюється знак нерівності:

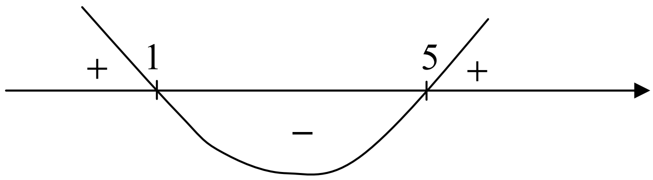
$$\log_2^2 x+1>2\log_2 x^3-4.$$

Функція $\log_2 x$ визначена при $x>0$, тому: $2\log_2 x^3=6\log_2 x$.

Робимо заміну $y=\log_2 x$, приходимо до нерівності:

$y^2-6y+5>0$ $\qquad$ $y_{1,2}=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm 2$.

Методом інтервалів знаходимо *y*:



Очевидно, що $y<1$ і $y>5$.

Таким чином, вихідна нерівність рівносильна сукупності нерівностей:

$$\begin{cases} \log_2 x<1 \\ \log_2 x>5 \end{cases}$$

Оскільки підстава логарифма більше одиниці, то: $\begin{cases} 0<x<2 \\ x>2^5 \end{cases}$

Відповідь: $(0;2)\cup(32;+\infty)$.►

<u>Приклад 16.</u> Знайти область визначення функції:

$$y=\sqrt{1-\log_8\left(x^2-4x+3\right)}.$$

◄Оскільки логарифмічна функція визначена тільки для позитивних чисел, а квадратний корінь – для ненегативних чисел, задача зводиться до рішення системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ 1-\log_8\left(x^2-4x+3\right)\geq 0 \end{cases}$$

Ліву частину першої нерівності розкладемо на множники $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm 1$, а в другій замінимо 1 на $\log_8 8$:

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ \log_8\left(x^2-4x+3\right)\leq\log_8 8. \end{cases}$$

Оскільки основа логарифма $8>1$, то, відповідно до властивостей логарифма, переходимо до системи:

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ x^2-4x+3\leq 8. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ x^2-4x-5\leq 0. \end{cases}$$

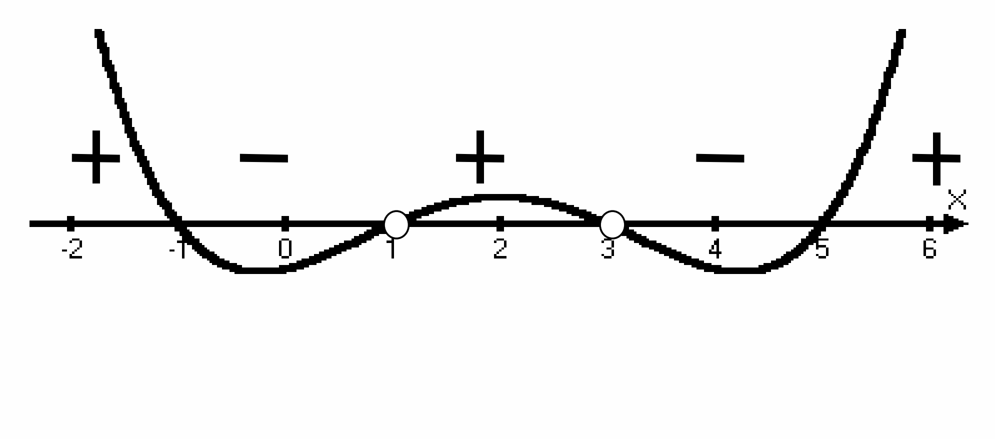
Ліву частину другої нерівності розкладемо на множники $x_{3,4}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm 3$.

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ (x-5)(x+1)\leq 0. \end{cases}$$

Остання система рівносильна нерівності:

$$(x-3)(x-1)(x-5)(x+1)\leq 0,$$

(при $x\neq 3$ і $x\neq 1$).



За допомогою методом інтервалів одержуємо: $[-1;1)\cup(3;5]$.

Відповідь: $[-1;1)\cup(3;5]$.►

<u>Приклад 17.</u> Розв'язати нерівність:

$$\log_{27}^{6}\sqrt{2,5-\frac{x}{6}}-\log_{9}^{6}\sqrt[3]{\frac{x}{25}+0,6}\le 0 .$$

◄Знайдемо ОПЗ:

$$\begin{cases} 2,5-\dfrac{x}{6}>0 \\ \dfrac{x}{25}+0,6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15-x>0 \\ x+15>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<15 \\ x>-15 \end{cases}$$

З властивостей логарифма $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\cdot\log_a b=\log_a\sqrt[m]{b}$.

Відповідно $\log_a\sqrt[m]{b}=\log_{a^m} b$

Маємо: $\log_{27}\sqrt[2]{2,5-\frac{x}{6}}=\log_{3^3}\sqrt[2]{2,5-\frac{x}{6}}=\log_{3^6}\left(2,5-\frac{x}{6}\right)$

$\log_{9}\sqrt[3]{\frac{x}{25}+0,6}=\log_{3^2}\sqrt[3]{\frac{x}{25}+0,6}=\log_{3^6}\left(\frac{x}{25}+0,6\right)$

Тоді вихідну нерівність можна переписати у виді:

$$\log_{3^6}^{6}\left(2,5-\frac{x}{6}\right)\le\log_{3^6}^{6}\left(\frac{x}{25}+0,6\right),$$

що еквівалентно (у силу парності показника ступеня) нерівності:

$$\left|\log_{3^6}\left(2,5-\frac{x}{6}\right)\right|\le\left|\log_{3^6}\left(\frac{x}{25}+0,6\right)\right|$$

Остання нерівність, у силу властивостей модуля, еквівалентна об'єднанню чотирьох систем нерівностей. При потенціюванні враховуючи, що $3^6>1$.

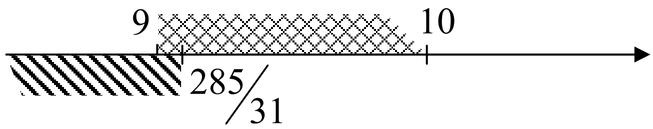
$$1)\begin{cases}\log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\ge 0\\ \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\ge 0\\ \log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\le \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}2,5-\dfrac{x}{6}\ge 1\\ \dfrac{x}{25}+0,6\ge 1\\ 2,5-\dfrac{x}{6}\le \dfrac{x}{25}+0,6\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}15-x\ge 6\\ x+15\ge 25\\ 375-25x\le 6x+90\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}x\le 9\\ x\ge 10\\ x\ge {}^{285}\!/_{31}\approx 9,2\end{cases}.$$

Цей випадок неможливий, оскільки ОПЗ повинна бути безперервною.

$$2)\begin{cases}\log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)< 0\\ \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)< 0\\ -\log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\le -\log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}2,5-\dfrac{x}{6}< 1\\ \dfrac{x}{25}+0,6< 1\\ 2,5-\dfrac{x}{6}\ge \dfrac{x}{25}+0,6\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}15-x< 6\\ x+15< 25\\ 375-25x\ge 6x+90\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}x> 9\\ x< 10\\ x\le {}^{285}\!/_{31}\end{cases}\qquad {}^{285}\!/_{31}\approx 9,2$$



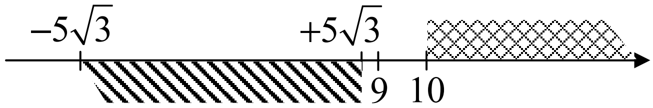
Рішенням другої системи буде $x\in\left(9;\,{}^{285}\!/_{31}\right]$

$$3)\begin{cases}\log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)< 0\\ \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\ge 0\\ -\log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\le \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}2,5-\dfrac{x}{6}< 1\\ \dfrac{x}{25}+0,6\ge 1\\ \left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\ge 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 15-x<6 \\ x+15\ge 25 \\ \dfrac{2,5x}{25}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{x^2}{150}-\dfrac{0,6x}{6}-1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>9 \\ x\ge 10 \\ x^2-75\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>9 \\ x\ge 10 \\ \left(x-5\sqrt{3}\right)\left(x+5\sqrt{3}\right)\le 0 \end{cases}$$

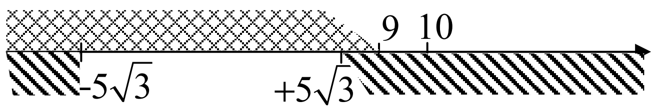
$$5\sqrt{3}\approx 8,67$$



Немає рішень

$$4)\begin{cases} \log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\ge 0 \\ \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)<0 \\ \log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\le -\log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,5-\dfrac{x}{6}\ge 1 \\ \dfrac{x}{25}+0,6<1 \\ \left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\le 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 15-x\ge 6 \\ x+15<25 \\ \dfrac{2,5x}{25}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{x^2}{150}-\dfrac{0,6x}{6}-1\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 9 \\ x<10 \\ x^2-75\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 9 \\ x<10 \\ \left(x-5\sqrt{3}\right)\left(x+5\sqrt{3}\right)\ge 0 \end{cases}$$



Рішенням четвертої системи буде $x\in\left(-\infty;-5\sqrt{3}\right]\cup\left[5\sqrt{3};9\right]$.

Поєднуючи всі рішення і з огляду на ОПЗ, одержуємо:

Відповідь: $x\in\left[-15;-5\sqrt{3}\right]\cup\left[5\sqrt{3};{}^{285}\!/_{31}\right]$.►

<u>Приклад 18.</u> Розв'язати нерівність $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$

◄Основна ідея рішення подібних нерівностей:

$\left(\log_a u(x)-\log_a v(x)\right)\cdot p(x)\le 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u(x)-v(x))\cdot p(x)\le 0 \\ u(x)>0 \\ v(x)>0 \end{cases}.$$

–перехід до підстави, більшої за $a>1$,

–заміна різниці логарифмів різницею відповідних функцій при природних обмеженнях на кожну з них,

– якщо ліва частина нерівності містить як співмножник який–небудь логарифм (а не різницю двох логарифмів), то для того, щоб застосувати пропоноване перетворення, необхідно представити цей логарифм у виді різниці, віднявши з нього нуль, записаний як логарифм одиниці по тій же основі.

$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0\Rightarrow$

Переходимо до підстави $a=2$

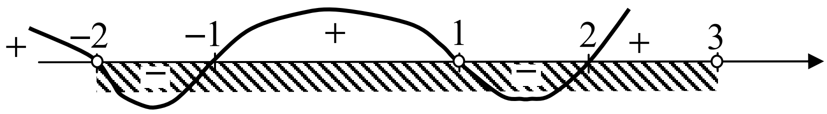
$$\Rightarrow \frac{\log_2(x+2)}{\log_2(2-x)}\cdot\frac{\log_2(3-x)}{\log_2(x+3)}\le 0\Rightarrow$$

$$\frac{\log_2(x+2)-\log_2 1}{\log_2(2-x)-\log_2 1}\cdot\frac{\log_2(3-x)-\log_2 1}{\log_2(x+3)-\log_2 1}\le 0\Rightarrow$$

Застосовуємо пропоноване перетворення:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)-1}{(2-x)-1}\cdot\dfrac{(3-x)-1}{(x+3)-1}\le 0 \\ x+2>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)}{(1-x)}\cdot\dfrac{(2-x)}{(x+2)}\le 0 \\ x>-2 \\ x<3 \end{cases}$$

Остання система легко вирішується методом інтервалів.



Відповідь: $x\in(-2;-1]\cup(1;2]$.▶

1.8. Індивідуальне завдання № 1.4

Студент повинен розв’язати одну з приведених нижче задач, вибравши її по своєму номері в журналі групи.

Розв’язати вираз, що містить логарифми:

1.	Розв’язати нерівність $\log_2 x+\log_2(x+1)<\log_2(2x+6)$
2.	Розв’язати нерівність $\log_3(x^2-5x+6)<0$

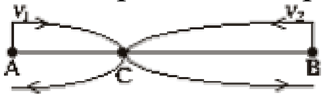
3.	Розв'язати нерівність $\log_{1/3}(\log_4(x^2-5))>0$
4.	Знайти область визначення функції $y=\sqrt{1-\log_8\left(x^2-4x+3\right)}$
5.	Розв'язати рівняння $\log_3(x+6)\cdot\log_x 3=2$
6.	Розв'язати рівняння $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$
7.	Розв'язати рівняння $\log_x(2x^2-4x+3)=2$
8.	Розв'язати нерівність $\log_x\dfrac{x+3}{x+1}>1$
9.	Розв'язати рівняння $4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x}-1}+2=0$
10.	Розв'язати рівняння $\sqrt{5}\cdot 0,2^{\frac{1}{2x}}-0,04^{1-x}=0$
11.	Розв'язати нерівність $\log_x\dfrac{4x+5}{6-5x}<-1$
12.	Спростити $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$
13.	Спростити $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$
14.	Спростити $(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8})\cdot 49^{\log_7 2}$
15.	Якщо $\log_a 27=b$, то чому дорівнює $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$
16.	Розв'язати рівняння $\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-3^{1/x}\right)$
17.	Розв'язати рівняння $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right)$
18.	Розв'язати рівняння $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$
19.	Розв'язати рівняння $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-0,5=0$
20.	Розв'язати рівняння $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$
21.	Розв'язати рівняння $0,5\left(\lg\left(x^2-55x+90\right)-\lg\left(x-36\right)\right)=\lg\sqrt{2}$
22.	Розв'язати рівняння $\lg\left(5-x\right)-\frac{1}{3}\lg\left(35-x^3\right)=0$
23.	Розв'язати рівняння $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}+\log_2\left(x^2-25\right)=0$

24.	Розв'язати рівняння $\dfrac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=-1$
25.	Розв'язати рівняння $\log_{0,5}^2 4x+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8$
26.	Розв'язати рівняння $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$
27.	Розв'язати рівняння: $2^{2x+2\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$
28.	Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+4}{2x-3}<0$
29.	Вирішите нерівність**:** $\log_{2x-5}(5x-2)\geq 1$
30.	Вирішите нерівність: $\log_{\lvert x+2\rvert}\left(4+7x-2x^2\right)\leq 2$
31.	Вирішите нерівність: $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\geq\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right)$

1.9. Складання рівнянь

Приклад 19. Розв'язати задачу: Два туристи йдуть назустріч один одному з пунктів A и B. Перший виходить з A на 6 годин пізніше, ніж другий з B, і при зустрічі в пункті C виявляється, що він пройшов на 12 км менш другого. Продовжуючи після зустрічі шлях з тією же швидкістю, перший приходить в B через 8 годин після зустрічі, а другий в A – через 9 годин. Визначити відстань AB і швидкість обох пішоходів.

◄Нехай v_1, v_2(км/ч) – швидкості першого і другого пішоходів, S(км)$=AB$. Зобразимо на кресленні рух пішоходів.



Оскільки ділянку CB перший пройшов за 8 годин, то $BC=8v_1$. Другий пройшов відстань CA за 9 годин, тому $AC=9v_2$.

З умови задачі маємо: $AC+12=BC\Rightarrow 9v_2+12=8v_1$.

Виразимо тепер час, витрачений пішоходами від початку руху до їхньої зустрічі: $t_1=\dfrac{AC}{v_1}=\dfrac{9v_2}{v_1}$, $t_2=\dfrac{BC}{v_2}=\dfrac{8v_1}{v_2}$.

Оскільки перший вийшов на 6 годин раніш, то: $t_1+6=t_2\Rightarrow\dfrac{9v_2}{v_1}+6=\dfrac{8v_1}{v_2}$.

Зробимо заміну: $\dfrac{v_2}{v_1}=a$ і вирішимо рівняння:

$$9a+6=\frac{8}{a}\Rightarrow 9a^2+6a-8=0\Rightarrow a_1=\frac{2}{3},\ a_2=-\frac{4}{3}.$$

Але a – це відношення швидкостей, а значить більше нуля. Одержимо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{2}{3} \\ 9v_2 - 12 = 8v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 6 \\ v_2 = 4 \end{cases}.$$

Виходить, $S = AC + BC = 9v_2 + 8v_1 = 84$.

Відповідь: $S = 84,\ v_1 = 6,\ v_2 = 4$.►

<u>Приклад 20.</u> Розв'язати задачу: Дві труби, працюючи одночасно, наповнюють басейн за 12 годин. Одна перша труба наповняє басейн на 10 годин повільніше, ніж одна друга. За скількох годин наповняє басейн одна друга труба?

◄Покладемо обсяг басейну = 1. Нехай t (год) – час наповнення басейну тільки другою трубою. Тоді тільки перша труба наповнить басейн за $t+10$ годин. Знаходимо продуктивність цих труб: $N_2 = \dfrac{1}{t}$, $N_1 = \dfrac{1}{t+10}$. За 12 годин спільної роботи з загальною продуктивністю $N_1 + N_2$ заповнюється весь басейн: $1 = \left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+10}\right) \cdot 12$. Вирішуємо отримане рівняння:

$$t^2 - 14t - 120 = 0 \Rightarrow t_1 = 20,\ t_2 = -6.$$

Відповідь: $t = 20$.►

<u>Приклад 21.</u> Розв'язати задачу: В ательє надійшло по одному шматку чорної, зеленої і синьої тканини. Хоча зеленої тканини було на 9 м менш, ніж чорної, і на 6 м більше, ніж синьої, вартість шматків була однаковою. Скільки метрів тканини було в кожнім шматку, якщо відомо, що вартість 4,5 м чорної тканини дорівнює загальній вартості 3 м зеленої і 50 см синьої?

◄Нехай $x_ч,\ x_з,\ x_с$ – кількість чорної, зеленої і синьої тканини відповідно.

Відомо: $x_ч - x_з = 9,\ x_з - x_с = 6$. Використовуємо формулу: $C = \dfrac{S}{q}$, де C – ціна тканини, S – вартість шматка, q – кількість тканини.

Нехай S = 1. Одержимо $C_ч = \dfrac{1}{x_ч},\ C_з = \dfrac{1}{x_з},\ C_с = \dfrac{1}{x_с}$ – ціни тканин. Складемо рівняння, що зв'язує ці вартості:

$$4{,}5C_ч = 3C_з + 0{,}5C_с \Rightarrow \frac{4{,}5}{x_ч} = \frac{3}{x_з} + \frac{0{,}5}{x_с}.$$

Виразимо $x_з$ і $x_с$ через $x_ч$: $x_з = x_ч - 9,\ x_с = x_з - 6 = x_ч - 15$.

Підставляємо в останнє рівняння:

$$\frac{4,5}{x_ч}=\frac{3}{x_ч-9}+\frac{0,5}{x_ч-15}\Rightarrow x_ч^2-58,5x_ч+607,5=0$$, причому $x_ч \neq 0;\ 9;\ 15$.

$x_ч = 45$, $x_ч = 13,5$.

Одержали

1. $x_з = 36,\ x_c = 30$.
2. $x_з = 4,5,\ x_c = -1,5$ – неможливо.

Відповідь: 45м, 36м, 30м. ►

Контрольні запитання

1. Навести приклади формул приведення й формул скороченого множення.
2. Як знайти корені квадратного рівняння?
3. Написати вираз теореми косинусів?
4. Яка властивість стосується діагоналей паралелограма?
5. Як вирішуються нерівності методом інтервалів?
6. Як правильно розкрити модульні дужки?
7. Що відбудеться зі знаком нерівності при множенні нерівності на негативне число?
8. Для яких чисел визначена логарифмічна функція?
9. Навести основні властивості логарифмів?

В розділі наведені типові задачі з тригонометрії, планіметрії, а також вирішення алгебраїчних й логарифмічних нерівностей, наведені приклади складання рівнянь